

نوبت دوم خارج

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۶	۱۴	۱۳	۷	۵	۱۹	۱۶
فیزیک	۷	۱۰	۱۷	۱	۱۴	۱۴	۷
شیمی	۱۰	۷	۱۰	۳	۸	۱۴	۸

ریاضیات

۱- گزینه‌ها

درس‌نامه ۱ در دنباله‌های هندسی، از تقسیم هر جمله به جمله قبلی‌اش به قدرنسبت می‌رسیم؛ یعنی:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

۲ اگر قدرنسبت یک دنباله هندسی، بین ۰ و ۱ و یکی از جملاتش مثبت باشد، جمله‌هایش حتماً نزولی هستند.

گام ۱ طبق مورد (۱) درس‌نامه، نسبت جمله دوم به اول و همین‌طور نسبت جمله پنجم به چهارم، باید مساوی q باشد:

$$q = \frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

گام ۲ معادله آبی‌رنگ بالا را طرفین وسطین می‌کنیم تا به یک معادله درجه دوم برسیم:

$$x(x-1) = (x+1)(x-1) \Rightarrow x^2 - x = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

معادله بالا را به کمک Δ حل می‌کنیم:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

گام ۳ حالا مقادیر x را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم تا هر دو مقدار قدرنسبت به دست بیاید:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q_2 = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}}$$

گام ۴ سؤال مجموع دو قدرنسبت را می‌خواهد که می‌شود:

$$q_1 + q_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}}\right) = \frac{(1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5}) + (1-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(-1-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{5}-5 + \sqrt{5}-1+\sqrt{5}+5}{-1-5} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

۲- گزینه‌ها

درس‌نامه ۱ ارزش گزاره‌های $p \vee q$ (همون p یا q)، $p \wedge q$ (همون p و q) و $p \Rightarrow q$ (همون اگر p آن‌گاه q) را در جدول زیر ببینید:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

۲ هم‌ارزی‌های زیر را بلد باشید:

(الف) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (ب) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(پ) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (ت) $\bigcirc \Rightarrow \bigcirc \equiv \bigcirc$

گام ۱ طبق مورد (۲) درس‌نامه، نقیض گزاره $p \wedge q$ می‌شود $\sim p \vee \sim q$ که جفتشان را در گزاره صورت سؤال داریم. به همین خاطر به جای جدول کشیدن، از هم‌ارزی‌ها کمک می‌گیریم.

گام ۲ طبق مورد ۲ - (الف) و (ب) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r \equiv \sim p \vee \sim q \vee r$$

گام ۳ با توجه به هم‌ارزی بالا می‌توانیم در گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r \Rightarrow \sim p \vee \sim q \vee r$ جای سمت چپ، بنویسیم $\sim p \vee \sim q \vee r$: $(\sim p \vee \sim q \vee r) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q \vee r)$

خودش

هم‌ارزی بالا هم طبق مورد ۲ - (ت) درس‌نامه همیشه درست است.

پس گزاره داده‌شده همواره درست است.

تیزبازی بیا باید فرض کنیم p و q هر دو نادرست‌اند. ارزش گزاره $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow \sim p \vee \sim q \vee r$ در این حالت می‌شود:

$$[(\text{ن} \wedge \text{ن}) \Rightarrow r] \Rightarrow [\text{د} \vee \text{د} \vee r] \equiv (\text{د} \Rightarrow \text{د}) \equiv \text{د}$$

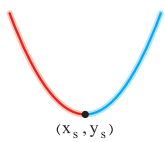
همین‌جا گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ حذف می‌شوند و ۴ می‌ماند. پس ۴ جواب است.

۳- گزینه‌ها

درس‌نامه ۱ در سهمی $y = Ax^2 + Bx + C$ ، طول و عرض رأس را می‌توانیم از رابطه‌های زیر به دست بیاوریم:

$$x_S = -\frac{B}{2A} \text{، طول رأس} \quad y_S = -\frac{\Delta}{4A} \text{، عرض رأس}$$

۲ هر وقت ضریب x^2 در یک سهمی مثبت بود، دهانه‌اش رو به بالا و هر وقت منفی بود دهانه‌اش رو به پایین است.



گام ۱ همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، سهمی در تمام قسمت آبی‌رنگش صعودی است؛ پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که این سهمی اکیداً صعودی هست، بازه $[x_S, +\infty)$ است.

گام ۲ به گفته سؤال، بزرگ‌ترین بازه‌ای که سهمی در آن اکیداً صعودی هست، بازه $[x_S, +\infty)$ است. از مقایسه این بازه با $[x_S, +\infty)$ ، نتیجه می‌گیریم که $x_S = -\frac{1}{7}$.

می‌شود. حالا به کمک مورد (۱) درس‌نامه x_S را در سهمی $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}x - \frac{1}{2}$ به دست می‌آوریم و مساوی $-\frac{1}{7}$ می‌گذاریم:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}x - \frac{9}{14} = 0$$

پس ضابطه سهمی به این صورت شد:

گام ۳ حالا می‌توانیم به کمک مورد (۱) درس‌نامه، عرض رأس سهمی بالا را حساب کنیم:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4A} = -\frac{(\frac{1}{7})^2 - 4(\frac{1}{2})(-\frac{9}{14})}{4(\frac{1}{2})} = -\frac{\frac{1}{49} + \frac{36}{14}}{2} = -\frac{\frac{1+96}{49}}{2} = -\frac{97}{98}$$

۴- گزینه ۲

۱ درس نامه اتحادهای چاق و لاغر را بلد باشید:

$$\begin{cases} (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \end{cases}$$

۲ فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه مثل x^2-1 و $q(x)$ هم یک چندجمله‌ای بدقلق تجزیه‌نشو مثل x^2-x+1 باشد. برای محاسبه باقی‌مانده $p(x)$ بر $q(x)$ کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

اول $q(x)$ را مساوی صفر می‌گذاریم، معمولاً در این تساوی به کمک اتحادها می‌توانیم به یک تساوی ساده‌تر برسیم؛ ببینید:

$$x^2-x+1=0 \begin{cases} \xrightarrow{x(x+1)} (x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \\ \text{چاق و لاغر} \\ \xrightarrow{\quad\quad\quad} x^2=x-1 \end{cases}$$

بعد سعی می‌کنیم در $p(x)$ تا جای ممکن x^3 بسازیم تا به جایش -1 و در مرحله بعدی x^2 بسازیم تا به جایش $x-1$ بنویسیم؛ این‌جوری:

$$x^3-1=(\underbrace{x^3}_{-1})(\underbrace{x^2}_{-1})(\underbrace{x^2}_{x-1})-1=(x-1)-1=x-2$$

حالا می‌توانیم بگوییم باقی‌مانده شد « $x-2$ ».

۳ باقی‌مانده تقسیم $x^{17}-5$ را بر چندجمله‌ای تجزیه‌نشو x^2-x+1 می‌خواهیم؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، x^2-x+1 را مساوی صفر می‌گذاریم و سعی می‌کنیم به کمک اتحادها به تساوی ساده‌تری برسیم. حواسمان هم هست که این عبارت خیلی شبیه قسمت چاق اتحاد چاق و لاغر است؛ پس این اتحاد انتخاب مناسبی است:

$$x^2-x+1=0 \begin{cases} \xrightarrow{x(x+1)} (x+1)(x^2-x+2)=0 \Rightarrow x^3+1=0 \\ \Rightarrow x^3=-1 \\ \Rightarrow x^2=x-1 \end{cases}$$

۴ در ادامه باز هم طبق مورد (۲) درس‌نامه سعی می‌کنیم در مقسوم، یعنی $x^{17}-5$ تا جای ممکن x^3 بسازیم تا به جایش « -1 » و در مرحله بعد x^2 بسازیم تا به جایش « $x-1$ » بنویسیم:

$$x^{17}-5=x^2 \cdot x^{15}-5=\underbrace{x^2}_{x-1}(\underbrace{x^2}_{-1})^5-5=\underbrace{-(x-1)}_{1-x}-5=-x-4$$

پس $r(x)=-x-4$ و در نتیجه حاصل‌ضرب ضرایبش می‌شود $(-4)(-1)=4$.

مشاوره باقی‌مانده تقسیم بر چندجمله‌ای‌های تجزیه‌نشو، متأسفانه کاملاً خارج از کتاب درسی است. به همین خاطر احتمالاً در حل این سؤال دچار مشکل می‌شوید. درس‌نامه را بخوانید تا مشکلاتان برطرف بشود.

۵- گزینه ۳

۱ استراتژی قبل از هر چیز شرط Δ را بررسی می‌کنیم. در ادامه شرط ریشه‌ها را به زبان نامساوی‌ها می‌نویسیم و به کمکشان دوتا عبارت مثبت می‌سازیم تا بتوانیم حاصل‌ضربشان را بزرگ‌تر از صفر بگذاریم. این‌جوری به نامعادله‌ای می‌رسیم که به کمک S و P می‌توانیم حلش کنیم.

۲ درس نامه معادله درجه دوم $Ax^2+Bx+C=0$ به شرطی دوتا ریشه دارد که $\Delta > 0$ باشد. جمع (S) و ضرب (P) این ریشه‌ها هم از این رابطه‌ها محاسبه می‌شوند:

$$S = -\frac{B}{A} \quad \text{و} \quad P = \frac{C}{A}$$

۳ در سهمی $y = Ax^2 + Bx + C$ ، اگر ضریب x^2 ، یعنی A مثبت باشد، دهانه سهمی رو به بالا و اگر منفی باشد، دهانه سهمی رو به پایین است.

۴ چون قرار است معادله $-x^2 + \Delta x + m = 0$ دوتا ریشه داشته باشد، پس دلتایش بزرگ‌تر از صفر است.

$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta^2 - 4(-1)(m) > 0 \Rightarrow 25 + 4m > 0 \Rightarrow 4m > -25$$

$$\Rightarrow m > -\frac{25}{4} \Rightarrow m > -6 \dots (I)$$

۵ فرض می‌کنیم ریشه‌های معادله α و β باشند. به گفته سؤال این ریشه‌ها کوچک‌تر از $\frac{9}{4}$ هستند، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \alpha < \frac{9}{4} \Rightarrow \alpha - \frac{9}{4} < 0 \\ \beta < \frac{9}{4} \Rightarrow \beta - \frac{9}{4} < 0 \end{cases}$$

۶ با توجه به نامساوی‌های بالا، « $\alpha - \frac{9}{4}$ » و « $\beta - \frac{9}{4}$ » هر دو منفی‌اند؛ پس ضربشان باید مثبت باشد:

$$(\alpha - \frac{9}{4})(\beta - \frac{9}{4}) > 0 \Rightarrow \alpha\beta - \frac{9}{4}\alpha - \frac{9}{4}\beta + \frac{81}{16} > 0 \Rightarrow P - \frac{9}{4}S + \frac{81}{16} > 0 \quad (*)$$

۷ در ادامه به کمک درس‌نامه، S و P را در معادله $\frac{-1}{A}x^2 + \frac{\Delta}{B}x + \frac{m}{C} = 0$ به دست می‌آوریم:

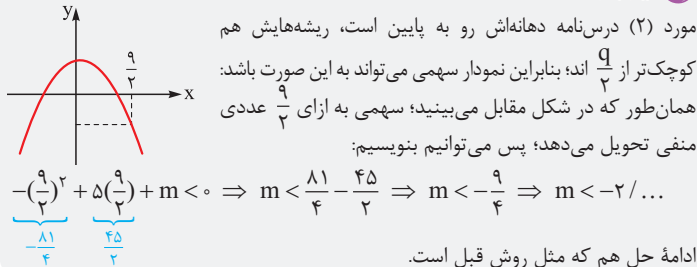
$$\begin{cases} S = -\frac{B}{A} = -\frac{\Delta}{-1} = \Delta \\ P = \frac{C}{A} = \frac{m}{-1} = -m \end{cases}$$

۸ حالا S و P به دست آمده را در نامساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$-m - \frac{9}{4}(\Delta) + \frac{81}{16} > 0 \Rightarrow m < \frac{81}{16} - \frac{9\Delta}{4} \Rightarrow m < -\frac{9}{4} \Rightarrow m < -2 \dots (II)$$

۹ با توجه به نامساوی‌های (I) و (II) می‌توانیم بگوییم $-6 < m < -2$ ؛ پس m چهار مقدار صحیح -5 ، -4 ، -3 را می‌تواند داشته باشد.

۱۰ تیزبازی ضریب x^2 در سهمی $y = -x^2 + \Delta x + m$ عددی منفی است، پس طبق



۶- گزینه ۲

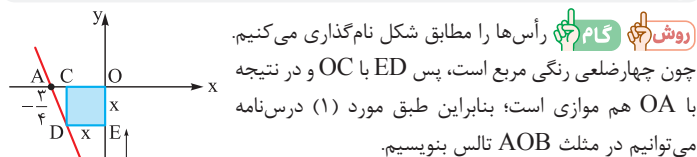
۱ درس نامه در شکل زیر اگر DE با BC موازی باشد، می‌توانیم تناسب‌های زیر را بنویسیم:

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{AD}{DB} &= \frac{AE}{EC} \quad (\text{جزء به جزء}) \\ \text{ب)} \quad \frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (\text{جزء به کل}) \end{aligned}$$

۲ اگر خطی محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول P و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض Q قطع کند، معادله‌اش را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

۳ طول قطر مربعی به ضلع x می‌شود $x\sqrt{2}$.



۸ فرض می‌کنیم طول ضلع مربع x باشد. در این صورت $ED = EO = x$ و $BE = OB - OE = 6 - x$ می‌شود. حالا در مثلث AOB تالس جزء به کل می‌نویسیم:

$$\frac{BE}{BO} = \frac{ED}{OA} \Rightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{x}{6} \Rightarrow 6-x = x \Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

گام ۳ در مستطیل، طول و عرض، یعنی BC و AB بر هم عمودند، پس طبق مورد (۳) حاصل ضرب شیب‌هایشان باید مساوی -۱ باشد:

گام ۴ طبق مورد (۲) درس‌نامه $m_{BC} = \frac{\alpha - 4}{(2\alpha - 4) - (-1)} = \frac{\alpha - 4}{2\alpha - 3}$ و

$m_{AB} = \frac{\alpha - 4}{(2\alpha - 4) - 1} = \frac{\alpha - 4}{2\alpha - 5}$ است. این دو مورد را در تساوی بالا جای‌گذاری می‌کنیم تا به مقدار α برسیم:

$$\frac{\alpha}{2\alpha - 3} \times \frac{\alpha - 4}{2\alpha - 5} = -1 \Rightarrow \frac{\alpha(\alpha - 4)}{(2\alpha - 3)(2\alpha - 5)} = -1$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha - 4) = -(2\alpha - 3)(2\alpha - 5) \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = -((2\alpha)^2 - 14(2\alpha) + 15)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = -4\alpha^2 + 16\alpha - 15 \Rightarrow 5\alpha^2 - 20\alpha + 15 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 5} \underbrace{1\alpha^2}_A - \underbrace{4\alpha}_B + \underbrace{3}_C = 0 \xrightarrow{A+B+C=0} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = \frac{C}{A} = \frac{3}{1} \end{cases}$$

این‌جا باید حواسمان باشد که مقدار درست α را انتخاب کنیم. در شکل مورد نظر، $B(2\alpha - 4, \alpha)$ سمت راست $C(-1, 0)$ قرار دارد، پس طول B باید بیشتر از طول C باشد. به ازای $\alpha = 1$

این اتفاق نمی‌افتد، پس $\alpha = 3$ را انتخاب می‌کنیم.

به ازای $\alpha = 3$ ، نقطه $B(2\alpha - 4, \alpha)$ به این صورت می‌شود:

$$B(2(3) - 4, 3) = (2, 3)$$

گام ۵ سؤال طول مستطیل را می‌خواهد که همان فاصله نقطه‌های $C(-1, 0)$ و $B(2, 3)$ است. فاصله این نقاط طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌شود:

$$BC = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

۸- گزینه ۲

درس‌نامه اگر a عددی مثبت باشد، می‌توانیم نامساوی‌های $|x| < a$ و $|x| > a$ را به صورت زیر، بدون قدرمطلق بنویسیم:

$$\diamond |x| > a \Rightarrow x > a \text{ یا } x < -a$$

$$\diamond |x| < a \Rightarrow -a < x < a$$

گام ۱ با تابع دوضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 7 - 3x & |x| > 1 \\ -2x & |x| < 1 \end{cases}$ طرف هستیم. پس باید بفهمیم برای محاسبه $f(1 + a^2)$ و $f(-\frac{a^2}{1 + a^2})$ از کدام ضابطه باید استفاده کنیم.

گام ۲ اول باید حواسمان باشد که a نمی‌تواند صفر باشد، چون به ازای $a = 0$ ، $f(1 + a^2) = f(1)$ می‌شود و در هیچ‌کدام از ضابطه‌ها وجود ندارد؛ بنابراین a یا مثبت است یا منفی. ما فرض می‌کنیم $a = 1$ است.

گام ۳ به ازای $a = 1$ ورودی‌های $x = 1 + a^2$ و $x = -\frac{a^2}{1 + a^2}$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = -\frac{a^2}{1 + a^2} = -\frac{1}{1 + 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |x| < 1 \\ x = 1 + a^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow |x| > 1 \end{cases}$$

گام ۴ با توجه به نامساوی‌های بالا برای محاسبه $f(-\frac{a^2}{1 + a^2})$ باید از ضابطه پایینی $(f(x) = -2x, |x| < 1)$ و برای محاسبه $f(1 + a^2)$ باید از ضابطه بالایی $(f(x) = 7 - 3x, |x| > 1)$ استفاده کنیم:

$$f(-\frac{a^2}{1 + a^2}) = -2(-\frac{a^2}{1 + a^2}) = \frac{2a^2}{1 + a^2}$$

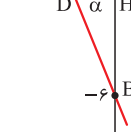
$$f(1 + a^2) = 7 - 3(1 + a^2) = 7 - 3 - 3a^2 = 4 - 3a^2$$

گام ۴ حالا که می‌دانیم طول ضلع مربع $\frac{2}{3}$ است، طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم طول قطرش می‌شود:

$$OD = \frac{2}{3} \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 2}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

روش

گام ۱ مطابق شکل فرض می‌کنیم طول ضلع مربع α باشد، در این صورت طول و عرض نقطه D هر دو منفی‌اند. مختصاتش به این صورت می‌شود: $D(-\alpha, -\alpha)$



گام ۲ همان‌طور که در شکل بالا می‌بینید؛ خط d محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{3}{4}$ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{4}{6}$ قطع می‌کند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه

$$\text{معادله‌اش را می‌توانیم به این صورت بنویسیم: } d: \frac{x}{-\frac{3}{4}} + \frac{y}{-\frac{4}{6}} = 1 \Rightarrow -\frac{4}{3}x - \frac{y}{6} = 1$$

گام ۳ نقطه $D(-\alpha, -\alpha)$ روی خط d قرار دارد، پس باید در معادله‌اش صدق کند:

$$-\frac{4}{3}(-\alpha) - \frac{-\alpha}{6} = 1 \Rightarrow \frac{4}{3}\alpha + \frac{\alpha}{6} = 1 \xrightarrow{\times 6} 8\alpha + \alpha = 6$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

بنابراین مختصات نقطه D به صورت $D(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ می‌شود.

گام ۴ اول نکته زیر را بخوانید:

نکته فاصله نقطه $A(a, b)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $OA = \sqrt{a^2 + b^2}$

طول قطر مربع همان فاصله نقطه $D(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ از مبدأ مختصات است که طبق نکته بالا برابر می‌شود با:

$$OD = \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{2 \times (\frac{2}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

۷- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

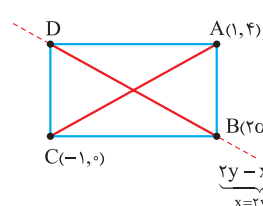
۲ شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

۳ دو خط با شیب‌های m_1 و m_2 به شرطی بر هم عمودند که ضرب شیب‌هایشان مساوی -۱، یعنی $m_1 \cdot m_2 = -1$ باشد.

۴ اگر نقطه‌ای مثل A روی تابع $y = f(x)$ باشد، می‌توانیم مختصات پارامتری‌اش را به صورت $A(\alpha, f(\alpha))$ در نظر بگیریم. مثلاً اگر نقطه A روی خط $y = x + 1$ قرار داشته باشد، مختصات پارامتری‌اش به صورت $A(\alpha, \alpha + 1)$ است.

گام ۱ اول شکل فرضی زیر را می‌کشیم. حواسمان هم هست که C را سمت چپ و پایین‌تر از A بگذاریم، چون هم طولش $2y - x = 4$ از A کم‌تر است و هم عرضش. به گفته



سؤال نقطه B روی خط $2y - x = 4$ قرار دارد، پس طبق مورد (۴) درس‌نامه، می‌توانیم مختصات پارامتری‌اش را به صورت $B(2\alpha - 4, \alpha)$ در نظر بگیریم.

گام ۱ تابع $f(x)$ اکیداً صعودی و دامنه‌اش $D_f = [-1, \infty)$ است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه بردش می‌شود: $R_f = [f(-1), \infty)$.

$f(-1)$ هم که می‌شود $1 = \sqrt{1 + \sqrt{1 - 1}} = 1$ ، پس: $R_f = [1, \infty)$

طبق مورد (۵) درس‌نامه $R_f = [1, \infty)$ همان $D_{f^{-1}}$ است، بنابراین: $D_{f^{-1}} = [1, \infty)$

گام ۲ چون $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$ اکیداً صعودی شد، بنابراین طبق مورد (۳) درس‌نامه، تعداد جواب‌های معادله $f(x) = x$ ، تعداد نقاط برخورد f و f^{-1} را می‌دهد؛ پس این معادله را می‌سازیم:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = x \xrightarrow{\text{توان } 2} 1 + \sqrt{1 + x} = x^2 \Rightarrow \sqrt{1 + x} = x^2 - 1 \quad (*)$$

فقط باید حواسمان باشد که در معادله بالا x ‌هایی قابل قبول‌اند که عضو $D_f \cap D_{f^{-1}}$ باشند. $D_f = [-1, \infty)$ و $D_{f^{-1}} = [1, \infty)$ شد، پس $D_f \cap D_{f^{-1}} = [1, \infty)$ در نتیجه باید $x \geq 1$ باشد.

گام ۳ تعداد جواب‌های معادله (*) را می‌خواهیم، پس طبق مورد (۴) درس‌نامه، نمودار « $\frac{x^2 - 1}{(x - 1)(x + 1)}$ » و « $\sqrt{1 + x}$ » را مثل شکل مقابل در یک دستگاه مختصات می‌کشیم تا ببینیم به ازای $x \geq 1$ در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند:

همان‌طور که می‌بینید؛ بعد از $x = 1$ ، یک نقطه برخورد داریم، پس معادله $f(x) = x$ هم یک جواب دارد، این یعنی f و f^{-1} در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

۱۰- گزینه ۱

درس‌نامه در دنیای لگاریتم‌ها قوانین مهم زیر برقرارند:

الف) اگر $\log_a b = c$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

ب) جمع و تفریق دو لگاریتم با مبنای یکسان به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc, \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

پ) لگاریتم، توانی را که روی عبارت جلوی نشسته باشد، به عنوان ضریب به پشت خودش منتقل می‌کند؛ یعنی:

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

گام ۱ در تساوی داده‌شده جای $x^2 - 2x + 1$ می‌نویسیم $(x - 1)^2$ تا به تساوی:

$$\log(1 - x)^2 + 3 \log(1 - x) = 5$$

گام ۲ طبق مورد (پ) درس‌نامه می‌توانیم جای $3 \log(1 - x)$ بنویسیم $\log(1 - x)^3$:

$$\log(1 - x)^2 + \log(1 - x)^3 = 5$$

در سمت چپ تساوی بالا، جمع دو لگاریتم با مبنای یکسان را داریم، پس طبق مورد (پ) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\log(1 - x)^2 \times (1 - x)^3 = 5 \Rightarrow \log_3 (1 - x)^5 = 5$$

$$\xrightarrow{\text{مورد الف درس‌نامه}} (1 - x)^5 = 10^5 \xrightarrow{\text{فرجه ۵}} 1 - x = 10 \Rightarrow x = -9$$

گام ۳ $\log_3(-x)$ به ازای $x = -9$ می‌شود $\log_3 9$. حالا جای ۹ می‌نویسیم 3^2 تا بتوانیم به کمک مورد (پ) درس‌نامه، خواسته سؤال را حساب کنیم:

$$\log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \times 1 = 2$$

۱۱- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه α در مثلث قائم‌الزاویه زیر را به این صورت می‌نویسیم:

$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AH}{AB}$

$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AH}{BH}$

$\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{BH}{AB}$

$\cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{BH}{AH}$

گام ۱ حالا طبق میل سؤال $f(-\frac{a^2}{1+a^2})$ را مساوی $f(1+a^2)$ می‌گذاریم:

$$\frac{2a^2}{1+a^2} = 4 - 3a^2 \Rightarrow 2a^2 = (4 - 3a^2)(1 + a^2)$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 4 + 4a^2 - 3a^2 - 3a^4 \Rightarrow 3a^4 + a^2 - 4 = 0$$

گام ۲ فرض می‌کنیم $a^2 = t$ باشد، در این صورت باید جای a^4 در معادله بالا بنویسیم t^2 :

$$3t^2 + t - 4 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{C}{A} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

گام ۳ حالا جای t ‌های بالا می‌نویسیم a^2 :

$$\begin{cases} a^2 = -\frac{4}{3} \times \\ a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \checkmark \end{cases}$$

بنابراین اختلاف مقادیر a می‌شود $1 - (-1) = 2$.

۹- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ اگر نمودار تابع $f(x)$ را بلد باشیم، می‌توانیم به کمک جدول زیر نمودار توابع $f(x) \pm k$ ، $f(x) \pm k$ و همین‌طور $-f(x)$ را هم بکشیم (k هم عددی مثبت است):

ضابطه تابع	روش رسم از روی $f(x)$
$f(x + k)$	نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت چپ می‌بریم.
$f(x - k)$	نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت راست می‌بریم.
$f(x) + k$	نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت بالا می‌بریم.
$f(x) - k$	نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت پایین می‌بریم.
$-f(x)$	نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

۲ اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، برای $f > 0$ ، تابع $\sqrt{f}$ هم اکیداً نزولی خواهد بود.

۳ اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، جواب‌های معادله $f(x) = x$ به ما نقاط برخورد f و f^{-1} را می‌دهد. فقط باید حواسمان باشد x ‌هایی قابل قبول‌اند که عضو $D_f \cap D_{f^{-1}}$ هستند.

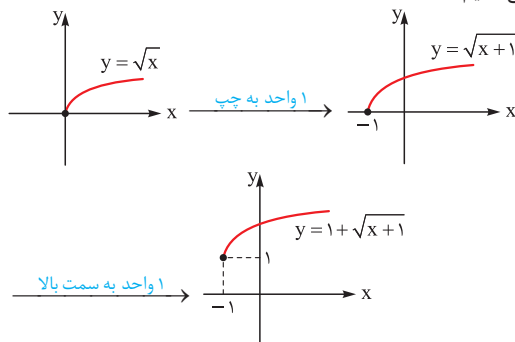
۴ اگر تابع f با دامنه $D_f = [a, \infty)$ ، اکیداً صعودی باشد، بردش برابر است با:

$$R_f = [f(a), \infty)$$

۵ دامنه f همان برد f^{-1} و برد f همان دامنه f^{-1} است.

۶ برای پیدا کردن تعداد جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ ، روش هندسی انتخابی مناسبی است. در این روش تعداد نقاط برخورد نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ در یک دستگاه مختصات، همان تعداد جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است.

گام ۱ به کمک مورد (۱) درس‌نامه، در سه مرحله از روی نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نمودار $y = 1 + \sqrt{1 + x}$ را می‌کشیم:



از روی نمودار آخر، دوتا نتیجه می‌توانیم بگیریم:

♦ $y = 1 + \sqrt{1 + x}$ اکیداً صعودی است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، جذرش، یعنی

$$y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$$

♦ تابع $y = 1 + \sqrt{1 + x}$ ، در بازه $[-1, \infty)$ تعریف شده و بزرگ‌تر از صفر هم هست؛ پس

$$\text{دامنه } f \text{ تابع } f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} \text{ هم می‌شود: } D_f = [-1, \infty)$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه « $18^\circ - \alpha$ » به صورت زیر است:

$\sin(18^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(18^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(18^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(18^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

از تساوی $\cot(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ می‌فهمیم که $\hat{B} - \hat{C} = 6^\circ$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos(\hat{B} - \hat{C}) = \cos 6^\circ \Rightarrow \cos(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{2} \quad (*)$$

در عبارت $M = \frac{2\cos(\hat{B} + \hat{C}) + 1}{4\sin \hat{B} \cos \hat{C}}$ ، صورت و مخرج را به ۲ تقسیم می‌کنیم

$$M = \frac{\cos(\hat{B} + \hat{C}) + \frac{1}{2}}{2\sin \hat{B} \cos \hat{C}} \quad \text{تا به } M = \frac{\cos(\hat{B} + \hat{C}) + \frac{1}{2}}{2\sin \hat{B} \cos \hat{C}} \text{ برسیم. این جوری می‌توانیم طبق رابطه (*) در این تساوی}$$

$$M = \frac{\cos(\hat{B} + \hat{C}) + \cos(\hat{B} - \hat{C})}{2\sin \hat{B} \cos \hat{C}} \quad \text{جای } \frac{1}{2} \text{ بنویسیم: } \cos(\hat{B} - \hat{C})$$

حالا $\cos(\hat{B} + \hat{C})$ و $\cos(\hat{B} - \hat{C})$ در تساوی بالا را به کمک درس‌نامه، بازشان می‌کنیم:

$$M = \frac{(\cos \hat{B} \cos \hat{C} - \sin \hat{B} \sin \hat{C}) + (\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C})}{2\sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{2\cos \hat{B} \cos \hat{C}}{2\sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \cot \hat{B}$$

تیزبازی بعد از این که فهمیدیم $\hat{B} - \hat{C} = 6^\circ$ می‌شود، می‌توانیم فرض کنیم $\hat{B} = 9^\circ$ و $\hat{C} = 3^\circ$ است؛ این جوری خواسته سؤال برابر می‌شود با:

$$M = \frac{2\cos(\hat{B} + \hat{C}) + 1}{4\sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{2\cos(9^\circ + 3^\circ) + 1}{4\sin 9^\circ \cos 3^\circ}$$

$\sin 9^\circ$ و $\cos 3^\circ$ که به ترتیب ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos 12^\circ = \cos(18^\circ - 6^\circ)$ هم طبق

مورد (۲) درس‌نامه می‌شود $-\cos 6^\circ = -\frac{1}{2}$ ، بنابراین M برابر است با:

$$M = \frac{2(-\frac{1}{2}) + 1}{4(1)(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$$

تنها گزینه‌ای که بهمان $^\circ$ می‌دهد، $\cot \hat{B}$ در (۴) ببینید:

$$\cot \hat{B} = \cot 9^\circ = \frac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} = \frac{1}{0} = 0$$

فرض کردیم 9° باشد

پس همین گزینه جواب است.

۱۴- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ برای از بین بردن منفی پشت کسینوس در $-\cos \alpha$ ، به جای α مکملش یعنی « $\pi - \alpha$ » را قرار می‌دهیم. برای از بین بردن منفی پشت بقیه نسبت‌های مثلثاتی هم، زاویه را قرینه می‌کنیم؛ ببینید:

$-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$	$-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$
$-\cot \alpha = \cot(-\alpha)$	$-\tan \alpha = \tan(-\alpha)$

برای حل معادلات مثلثاتی از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

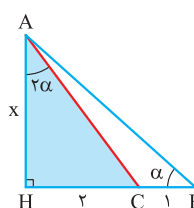
معادله	فرم کلی جواب
$\sin x = \sin \alpha$	$x = 2k\pi + \alpha$ یا $x = 2k\pi + (\pi - \alpha)$
$\cos x = \cos \alpha$	$x = 2k\pi \pm \alpha$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = k\pi \pm \alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

۲ برای $\tan 2\alpha$ ، اتحاد مقابل را بلد باشید:

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

۳ $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ معکوس هم‌اند، یعنی:



رأس‌های شکل را به این صورت نام‌گذاری می‌کنیم، طول AH را هم x در نظر می‌گیریم.

برای زاویه α در مثلث قائم‌الزاویه ABH، به کمک مورد (۱) درس‌نامه، تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan \alpha = \frac{AH}{BH} = \frac{x}{2-x} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{x}{2-x} \quad (*)$$

حالا به مثلث قائم‌الزاویه رنگی بالا نگاه کنید. در این مثلث برای زاویه 2α ، تانژانت می‌نویسیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{CH}{AH} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2}{x}$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه، همان $\tan 2\alpha$ همان $\frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ است، پس رابطه بالا به این صورت درمی‌آید:

طبق رابطه (*) می‌توانیم به جای $\tan \alpha$ در تساوی بالا بنویسیم $\frac{x}{2-x}$:

$$\frac{2(\frac{x}{2-x})}{1 - (\frac{x}{2-x})^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{\frac{2x}{2-x}}{1 - \frac{x^2}{(2-x)^2}} = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{2x}{2-x} \cdot \frac{(2-x)^2}{(2-x)^2 - x^2} = \frac{2}{x}$$

$$\xrightarrow{\times x} 2x^2 + x^2 = 9 \Rightarrow 3x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{3} = 3 \xrightarrow{x>0} x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

۴ $x = \sqrt{3}$ در تساوی (*) تا مقدار $\tan \alpha$ پیدا بشود:

$$\tan \alpha = \frac{3}{2-\sqrt{3}} = \frac{3}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{4-3} = 3(2+\sqrt{3})$$

طبق مورد (۳) درس‌نامه، $\cot \alpha$ می‌شود $\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{3(2+\sqrt{3})}$.

۱۲- گزینه ۴

۱ $\cot x$ را داریم، پس صورت و مخرج کسر $M = \frac{3\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ را بر $\sin x$

تقسیم می‌کنیم تا بتوانیم به جای $\frac{\cos x}{\sin x}$ ها بنویسیم $\cot x$:

$$M = \frac{\frac{3\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin x}} = \frac{3\cot x - 1}{\cot x + 1}$$

۲ به گفته سؤال $\cot x = 4$ است، پس M می‌شود:

$$M = \frac{3(4) - 1}{4 + 1} = \frac{11}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$$

تیزبازی اول نکته زیر را بخوانید:

نکته از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $a = ck$ و $b = dk$ است. مثلاً

اگر $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

به گفته سؤال $\cot x = 4$ است، پس $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4}{1}$ و در نتیجه طبق نکته بالا $\cos x = 4k$

و $\sin x = k$ می‌شود. این مقادیر را در کسر $M = \frac{3\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$M = \frac{3(4k) - k}{4k + k} = \frac{11k}{5k} = \frac{11}{5}$$

۱۳- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ $\cos(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ را به کمک رابطه‌های زیر می‌توانیم

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

بازشان کنیم:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

گزینه ۱۶

درس نامه ۱ اگر $x = \alpha, \beta$ ریشه‌های عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشند، می‌توانیم به این صورت تجزیه‌اش کنیم: $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ و در صورتی که α ریشه مضاعف عبارت باشد، به این صورت تجزیه می‌شود: $y = a(x - \alpha)^2$.

۲ اگر $x = k$ ریشه مخرج تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، ولی ریشه صورتش نباشد، می‌توانیم بگوییم $x = k$ مجانب قائم تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ است.

گام ۱ برای این که بفهمیم کجاها مجانب قائم داریم، باید اول صورت کسر، یعنی $2x^2 + x - 6$ را تجزیه کنیم. برای این کار ریشه‌هایش را لازم داریم:

$$2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2} \\ x = \frac{-1-7}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

حالا که ریشه‌های عبارت درجه دوم را داریم، طبق مورد (۱) درس نامه می‌توانیم صورت کسر را به صورت $2(x - \frac{3}{2})(x + 2)$ تجزیه کنیم.

پس تابعمان به این صورت شد:

$$f(x) = \frac{2(x - \frac{3}{2})(x + 2)}{ax^2 + (a-2)x + 4}$$

گام ۲ برای این که $f(x)$ یک مجانب قائم داشته باشد، طبق مورد (۱) درس نامه مخرجش باید یک ریشه داشته باشد، ریشه‌ای غیرمشتک با صورت. حالا حالت‌هایی را که ممکن است این اتفاق بیفتد بررسی می‌کنیم:

گام ۳ مخرج تابع، درجه ۱ باشد؛ در این حالت در مخرج نباید x^2 ببینیم؛ پس ضریبش، یعنی a را مساوی صفر می‌گذاریم:

$$f(x) = \frac{2(x - \frac{3}{2})(x + 2)}{ax^2 + (a-2)x + 4} \xrightarrow{a=0} f(x) = \frac{2(x - \frac{3}{2})(x + 2)}{-2x + 4}$$

همان‌طور که می‌بینید؛ در این حالت $x = 2$ ریشه صورت هست ولی ریشه مخرج نیست؛ پس طبق مورد (۲) درس نامه، تابع یک مجانب قائم دارد.

تا این‌جا یک مقدار برای a پیدا کردیم.

گام ۴ مخرج، تابع درجه ۲ باشد؛ در این حالت برای این که در مخرج یک ریشه ببینیم، دوتا کار می‌توانیم انجام بدهیم:

♦ کاری کنیم که مخرج ریشه مضاعف داشته باشد: طبق مورد (۳) درس نامه دلتای مخرج، یعنی دلتای $ax^2 + (a-2)x + 4$ را مساوی صفر می‌گذاریم:

$$(a-2)^2 - 4(a)(4) = 0 \Rightarrow (a^2 - 4a + 4) - 16a = 0 \Rightarrow a^2 - 20a + 4 = 0$$

دلتای معادله درجه دوم بالا عدد مثبت $16 - 400 = \Delta$ است، پس معادله بالا دوتا جواب دارد. این یعنی مخرج به ازای دو مقدار a ریشه مضاعف و در نتیجه یک مجانب قائم دارد. تا این‌جا « $2+1=3$ » مقدار برای a پیدا کردیم.

♦ کاری کنیم مخرج دوتا ریشه داشته باشد ولی یکی از ریشه‌های مخرج، ریشه صورت هم باشد: در این حالت یکی از ریشه‌های مخرج با صورت ساده می‌شود و در مخرج فقط یک ریشه می‌بینیم؛ این جوری یک مجانب قائم هم داریم. ریشه‌های صورت -2 و $\frac{3}{2}$ بودند، پس دو حالت داریم:

(۱) $x = -2$ ریشه مخرج باشد:

$$ax^2 + (a-2)x + 4 = 0 \xrightarrow{x=-2} 4a - 2a + 4 + 4 = 0 \Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow a = -4$$

(۲) $x = \frac{3}{2}$ ریشه مخرج باشد:

$$ax^2 + (a-2)x + 4 = 0 \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} a(\frac{3}{2})^2 + (a-2)(\frac{3}{2}) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}a - 3 + 4 = 0 \Rightarrow \frac{15}{4}a = -1 \Rightarrow a = -\frac{4}{15}$$

سه‌تا مقدار برای a پیدا کرده بودیم، دوتا هم این‌جا اضافه شد، پس در کل به ازای « $3+2=5$ » مقدار a ، تابع یک مجانب قائم دارد.

گام ۱ معادله $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{6} - x)$ را به صورت $\cos(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{6} - x) = 0$ می‌نویسیم. طبق مورد (۱) درس نامه برای از بین بردن منفی پشت کسینوس در $-\cos(\frac{\pi}{6} - x)$ باید به جای « $\frac{\pi}{6} - x$ » مکملش، یعنی $\frac{\Delta\pi}{6} + x$ را $\pi - (\frac{\pi}{6} - x) = \frac{\Delta\pi}{6} + x$ قرار بدهیم؛ این جوری به معادله زیر می‌رسیم:

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\Delta\pi}{6} + x)$$

گام ۲ جواب‌های معادله بالا را به کمک مورد (۲) درس نامه، به دست می‌آوریم:

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \pm (\frac{\Delta\pi}{6} + x) \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\Delta\pi}{6} + x \\ x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\Delta\pi}{6} - x \end{cases}$$

گام ۳ در معادله بالایی x حذف می‌شود و جوابی ندارد، به همین خاطر فقط معادله پایینی را حل می‌کنیم:

$$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\Delta\pi}{6} - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\Delta\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\xrightarrow{\substack{x \in (0, 2\pi) \\ k=1, 2}} x = \pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها می‌شود:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = (\pi - \frac{\pi}{4}) + (2\pi - \frac{\pi}{4}) = 3\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

گزینه ۴

درس نامه ۱ رفع ابهام در حضور مجهول؛ بعضی وقت‌ها سؤال می‌گوید $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

مساوی یک عدد حقیقی ناصفر است، ولی با جای‌گذاری $x = a$ در عبارت جلوی حد، به $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ می‌رسیم. در این حالت سریعاً $\frac{0}{0}$ را هم به ازای $x = a$ ، مساوی صفر بگذارید. این جوری به یک حد $\frac{0}{0}$ می‌رسید که حاصلش بعد از رفع ابهام، برابر آن عدد حقیقی است.

۲ یکی از سریع‌ترین روش‌های رفع ابهام صفر صفرم، استفاده از قاعده هوییتال است. در این روش اول جای صورت و مخرج مشتقشان را می‌نویسیم؛ بعد حد می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \text{۳}$$

گام ۱ به گفته سؤال $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{bx+c}}{x}$ مساوی عدد حقیقی و غیر صفر $\frac{1}{4}$ است. اما مخرج عبارت جلوی حد به ازای $x = 0$ ، صفر می‌شود، پس طبق مورد (۱) درس نامه، صورت هم به ازای $x = 0$ باید صفر بشود:

$$a + \sqrt{b(0)+c} = 0 \Rightarrow a + \sqrt{c} = 0 \Rightarrow a = -\sqrt{c} \quad (۱)$$

به ازای $a = -\sqrt{c}$ ، حدامان به این صورت می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{c} + \sqrt{bx+c}}{x}$$

گام ۲ با جای‌گذاری $x = 0$ در عبارت جلوی حد به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس طبق مورد (۲) درس نامه، هوییتال می‌زنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{c} + \sqrt{bx+c}}{x} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{b}{2\sqrt{bx+c}}}{1} = \frac{b}{2\sqrt{c}}$$

گام ۳ حالا طبق میل سؤال، حد را مساوی $\frac{1}{4}$ می‌گذاریم:

$$\frac{b}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{c}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{(-\sqrt{c})(\frac{\sqrt{c}}{2})}{c} = \frac{-\frac{1}{2}}{c} = -\frac{1}{2c}$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲)، مقدار $\frac{ab}{c}$ می‌شود:



۲ در تمام نسبت‌های مثلثاتی می‌توانیم ضرب زوج π را حذف کنیم.

۳ نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه را در جدول زیر ببینید:

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

گام ۱ در $f(x) = \frac{27 - \sin^3 x}{9 - \sin^2 x}$ ، صورت را به کمک اتحاد چاق و لاغر و مخرج را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(3 - \sin x)(9 + 3 \sin x + \sin^2 x)}{(3 - \sin x)(3 + \sin x)} = \frac{9 + 3 \sin x + \sin^2 x}{3 + \sin x}$$

گام ۲ طبق مورد (۱) درس‌نامه، $3g' - f'$ همان $(3g - f)'$ است، پس اول $3g - f$ را به دست می‌آوریم، بعد از آن مشتق می‌گیریم:

$$3g(x) - f(x) = 3\left(\frac{3}{3 + \sin x}\right) - \left(\frac{9 + 3 \sin x + \sin^2 x}{3 + \sin x}\right)$$

$$= \frac{9 - (9 + 3 \sin x + \sin^2 x)}{3 + \sin x} = \frac{-\sin x(3 + \sin x)}{3 + \sin x}$$

$$\Rightarrow 3g(x) - f(x) = -\sin x$$

گام ۳ حالا از طرفین تساوی بالا مشتق می‌گیریم:

$$(3g(x) - f(x))' = (-\sin x)' \Rightarrow 3g'(x) - f'(x) = -\cos x$$

در تساوی آخر جای x می‌نویسیم $\frac{\Delta \pi}{3}$ تا به خواسته سؤال برسیم:

$$3g'\left(\frac{\Delta \pi}{3}\right) - f'\left(\frac{\Delta \pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\Delta \pi}{3}\right) = -\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

مشاوره همیشه قبل از مشتق گرفتن، تابعان را تا جای ممکن ساده کنید؛ این جوری سریع‌تر به جواب می‌رسید.



۱۹- گزینه ۱

درس‌نامه $x = a$ برای تابع f در دو حالت نقطه گوشه‌ای است:

الف) در f در $x = a$ پیوسته باشد. مشتق چپ و راست f در $x = a$ ، جفتشان موجود ولی نابرابر باشند.

ب) در f در $x = a$ پیوسته باشد. از بین مشتق چپ و راست f در $x = a$ ، یکی موجود و دیگری نامتناهی باشد.

گام ۱ قبل از هر چیز به ضابطه پایین، یعنی $f(x) = b + (x - a)^m$ توجه کنید. به گفته سؤال، m صحیح و نامنفی و دامنه این ضابطه $x \geq a$ است؛ این یعنی برای این ضابطه $m \geq 0$

$f(a)$ تعریف شده است. این‌جا دوتا محدودیت برای m درست می‌شود:

♦ m نمی‌تواند صفر باشد؛ چون اگر صفر باشد، $f(x) = b + (x - a)^0$ و در نتیجه $f(a) = b + 0$ می‌شود:

° هم که تعریف نشده است، پس در این حالت $f(a)$ وجود ندارد. بنابراین $m \neq 0$ است. $m \geq 1$

تا این‌جا فهمیدیم که m عددی صحیح و مثبت است؛ یعنی:

گام ۲ حالا باید بفهمیم چه نقطه‌هایی می‌توانند گوشه‌ای باشند. به ازای $x < a$ ، با تابع ثابت $f(x) = b$ طرف هستیم که پیوسته و مشتق‌پذیر است؛ پس به ازای $x > a$ نقطه گوشه‌ای نداریم. به ازای $x > a$ هم با تابع $f(x) = b + (x - a)^m$ طرفیم که به ازای m های صحیح بزرگ‌تر مساوی ۱، چندجمله‌ای است؛ پس پیوسته و مشتق‌پذیر هست. در نتیجه برای $x > a$ هم نقطه گوشه‌ای نداریم. بنابراین تنها نقطه‌ای که ممکن است گوشه‌ای باشد، $x = a$ است.



۱۷- گزینه ۲

درس‌نامه تابع $f(x)$ به شرطی در $x = a$ پیوسته است که حد راست و چپ و

مقدارش در $x = a$ مساوی هم باشند؛ یعنی: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

گام ۱ همان $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$ است، پس ضابطه تابع را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} |x - 2| & |x - 2| \leq c \\ a(x - 2)^2 + b(x - 2) & |x - 2| > c \end{cases}$$

گام ۲ در ضابطه بالا $x - 2$ را t می‌گیریم تا به ضابطه ساده‌تر زیر برسیم:

$$f(t) = \begin{cases} |t| & |t| \leq c \\ at^2 + bt & |t| > c \end{cases} \Rightarrow f(t) = \begin{cases} |t| & -c \leq t \leq c \\ at^2 + bt & t < -c \text{ یا } t > c \end{cases}$$

گام ۳ ضابطه بالا و پایین $f(t)$ هر دو پیوسته‌اند، پس برای این‌که $f(t)$ پیوسته باشد،

باید در نقاط مرزی $t = -c$ و $t = c$ پیوسته باشد.

شرط پیوستگی در هر دو نقطه را اعمال می‌کنیم:

♦ پیوستگی در $t = c$: حد راست، حد چپ و مقدار تابع در $t = c$ را حساب می‌کنیم. حواسمان هم هست که برای محاسبه حد چپ و مقدار در $t = c$ از ضابطه بالایی ($f(t) = |t|$; $-c \leq t \leq c$) و برای محاسبه حد راست از ضابطه پایینی ($f(t) = at^2 + bt$; $t < -c$ یا $t > c$) استفاده کنیم:

$$\text{حد راست: } \lim_{t \rightarrow c^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow c^+} (at^2 + bt) = ac^2 + bc$$

$$\text{حد چپ و مقدار: } \lim_{t \rightarrow c^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow c^-} (|t|) = |c|$$

حد چپ و راست و مقدار تابع در $t = c$ را مساوی هم می‌گذاریم:

$$ac^2 + bc = |c| \quad \text{پس } |c| = c \text{ و در نتیجه تساوی بالا به این صورت درمی‌آید:}$$

$$ac^2 + bc = c \quad (I)$$

♦ پیوستگی f در $t = -c$: حد راست، حد چپ و مقدار تابع در $t = -c$ را حساب

می‌کنیم. حواسمان هم هست که برای محاسبه حد چپ در $t = -c$ از ضابطه پایینی ($f(t) = at^2 + bt$; $t < -c$ یا $t > c$) و برای محاسبه حد چپ و مقدار از ضابطه بالایی ($f(t) = |t|$; $-c \leq t \leq c$) استفاده کنیم:

$$\text{حد راست و مقدار: } \lim_{t \rightarrow (-c)^+} f(t) = f(-c) = |-c|$$

$$\text{حد چپ: } \lim_{t \rightarrow (-c)^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow (-c)^-} (at^2 + bt) = a(-c)^2 + b(-c) = ac^2 - c$$

حالا حد چپ و راست و مقدار تابع در $t = -c$ را مساوی هم می‌گذاریم:

$$ac^2 - c = |-c| \quad \text{چون } c \text{ عددی صحیح و نامنفی است، پس } -c \leq 0 \text{ است، بنابراین در تساوی بالا قرینه } -c \text{، یعنی } c = -(-c) \text{ را از قدرمطلق خارج می‌کنیم:}$$

$$ac^2 - c = c \quad (II) \quad \text{گام ۲ طرفین روابط (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم:}$$

$$(ac^2 + c) + (ac^2 - c) = c + c \Rightarrow 2ac^2 = 2c \Rightarrow ac^2 = c \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ ac - 1 = 0 \Rightarrow ac = 1 \end{cases}$$

در صورتی که $c = 0$ باشد، $[ac] = [0] = 0$ و در صورتی که $ac = 1$ باشد، $[ac] = [1] = 1$ است، پس دو مقدار برای $[ac]$ وجود دارد.



۱۸- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ مشتق بعضی از توابع را در جدول زیر ببینید:

تابع	مشتق
$af + bg$	$af' + bg'$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

گام ۱ ابتدا f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \sqrt{x|x|-x} = \sqrt{x(|x|-1)} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-1)} & x > 0 \\ \sqrt{x(-x-1)} & x \leq 0 \end{cases}$$

گام ۲ حالا دامنه هر ضابطه را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{x(x-1)} \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{c|c|c|c|c} & 0 & 1 & & \\ \hline & + & - & + & \\ \hline \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک یا } x > 0} x \in [1, \infty)$$

$$\sqrt{x(-x-1)} \Rightarrow x(-x-1) \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{array}{c|c|c|c|c} & -1 & 0 & & \\ \hline & - & + & - & \\ \hline \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک یا } x \leq 0} x \in [-1, 0]$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-1)} & x \geq 1 \\ \sqrt{x(-x-1)} & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

پس ضابطه f به این صورت شد:

گام ۳ اول به دنبال نقاط بحرانی می‌گردیم.

$\{-1, 0, 1\}$ که طول نقاط بحرانی‌اند، چون سر و ته بازه بسته هستند. حالا از هر ضابطه هم مشتق می‌گیریم و صورت و مخرج آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول مابقی نقاط بحرانی به دست آید:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-x} & x \geq 1 \\ \sqrt{-x^2-x} & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2-x} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} & \text{ریشه صورت} \\ x = 0, 1 & \text{ریشه‌های مخرج} \end{cases}$$

اما دقت کنید $x = \frac{1}{2}$ قبول نیست، چون دامنه $\sqrt{x^2-x}$ برابر $x \geq 1$ بود.

$$\sqrt{-x^2-x} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} & \text{ریشه صورت} \\ x = 0, -1 & \text{ریشه‌های مخرج} \end{cases}$$

بنابراین در کل طول نقاط بحرانی برابر $\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ است، یعنی تابع ۴ نقطه بحرانی دارد و $k = 4$ می‌شود.

گام ۴ حالا مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم تا طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی هم به دست آیند. دقت کنید همان‌طور که در گام ۳ دیدیم، در بازه $[-1, 0]$ ضابطه تابع به صورت $\sqrt{-x^2-x}$ و ضابطه مشتق آن به صورت $\frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}}$ است.

برای تعیین علامت $\frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}}$ در بازه $[-1, 0]$ توجه کنید که مخرج همواره مثبت است

(چون رادیکال با فرجه ۲ است) و کافی است صورت را تعیین علامت کنیم:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \\ \hline & - & + & - & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت در بازه } [-1, 0]} \begin{array}{c|c|c|c|c} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \\ \hline & - & + & - & \\ \hline \end{array}$$

علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر کرد، پس $x = -\frac{1}{2}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است. $x(x+1)$

گام ۵ در بازه $[1, \infty)$ هم ضابطه تابع به صورت $\sqrt{x^2-x}$ و ضابطه مشتق آن به صورت

$$\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت در بازه } [1, \infty)} \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & & & \\ \hline & + & + & + & \\ \hline \end{array}$$

علامت مشتق همواره مثبت است، پس در این بازه اکسترمم نسبی نداریم.

گام ۶ اگر $x = a$ بخواهد برای f نقطه گوشه‌ای باشد، طبق درس‌نامه، f باید در $x = a$ پیوسته باشد. حد چپ و راست و مقدار f در $x = a$ را حساب می‌کنیم، حواسمان هم هست که برای محاسبه حد راست و مقدار از ضابطه پایین و برای محاسبه حد چپ از ضابطه بالا استفاده کنیم:

$$\text{حد راست و مقدار: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (b + (x-a)^m) = b + (0)^m = b + (0)^m$$

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (b) = b$$

حالا سه مقدار بالا را مساوی هم می‌گذاریم: $b = b + (0)^m \Rightarrow 0 = (0)^m$ که چون $m \geq 1$ است، تساوی بالا همیشه برقرار است، پس تابع در $x = a$ پیوسته است.

گام ۷ حالا بایاید $m \geq 1$ را به دو قسمت تقسیم کنیم:

$$\text{در این حالت: } m = 1: f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^1 & x \geq a \end{cases}$$

می‌گیریم و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 1 \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید؛ مشتق چپ و راست در این حالت هر دو موجود ولی نابرابرند، پس طبق درس‌نامه، در این حالت $x = a$ نقطه گوشه‌ای است. تا این‌جا یک مقدار برای m پیدا کردیم.

گام ۸ $m \geq 2$: در این حالت می‌توانیم m را خود ۲ در نظر بگیریم. این جوری

$$f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^2 & x \geq a \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 0 + 2(x-a)^1 & x \geq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(a) = 0 \\ f'_+(a) = 2(a-a) = 0 \end{cases}$$

در این حالت مشتق چپ و راست هر دو موجود ولی برابرند، پس به ازای $m = 2$ نقطه گوشه‌ای نداریم. به ازای بقیه عددهای صحیح بزرگ‌تر از ۲ هم همین اتفاق می‌افتد، پس کلاً برای $m \geq 2$ نقطه گوشه‌ای نداریم. بنابراین در کل یک مقدار برای m پیدا شد.

۲۰- گزینه ۴

نکته استراتژی ابتدا قدرمطلق را از بین ببرید و بعد تابع را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید (حواستان به دامنه ضابطه‌ها باشد). سپس از f مشتق بگیرید و تعداد نقاط بحرانی و اکسترمم‌ها را محاسبه کنید.

درس‌نامه ۱ برای پیدا کردن دامنه توابع رادیکالی به شکل $\sqrt{u}$ ، کافی است نامعادله $u \geq 0$ را حل کنید.

۲ به سه دسته از نقاط یک تابع، نقطه بحرانی می‌گوییم:

الف) نقاط سر و ته بازه‌های بسته

ب) نقاط مشتق‌ناپذیر

پ) نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر است ولی مشتق در آن‌ها برابر صفر است.

۳ برای پیدا کردن نقاط بحرانی توابع رادیکالی به شکل $y = \sqrt{u}$ به این صورت عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم. حالا (همان‌طور که در مورد ۲ هم گفتیم) نقاط سر و ته بازه‌های بسته، بحرانی هستند.

ب) سپس از تابع مشتق می‌گیریم. حالا ریشه‌هایی از صورت و مخرج مشتق که در دامنه هستند هم بحرانی می‌شوند.

۴ برای پیدا کردن اکسترمم‌های نسبی یک تابع، ابتدا از آن مشتق می‌گیریم و سپس تعیین علامت می‌کنیم؛ حالا هر جا که علامت مشتق از مثبت به منفی تغییر کرد ماکزیمم نسبی و هر جا که علامت مشتق از منفی به مثبت تغییر کرد مینیمم نسبی داریم. برای مثال اگر جدول تعیین علامت مشتق یک تابع به صورت زیر باشد، داریم:

a	b	c	d
+	+	-	-
+	+	-	+
↗	↗	↘	↘
	max نسبی		min نسبی

$$\sigma_{\text{دوم}}^2 = \frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2 + (a-a)^2}{5} = \frac{S+0}{5} = \frac{S}{5}$$

$$\sigma_{\text{اول}}^2 = \frac{5}{4}$$

پس داریم: $\frac{\sigma_{\text{اول}}^2}{\sigma_{\text{دوم}}^2} = \frac{5}{4}$

گام ۱ سؤال گفته $\sigma_{\text{دوم}}^2 = \sigma_{\text{اول}}^2 + 1$ پس با توجه به نسبت $\frac{5}{4}$ که پیدا کردیم داریم:

$$\sigma_{\text{اول}}^2 = 5 \quad \sigma_{\text{دوم}}^2 = 4 \quad (S = 20 \text{ هستی د})$$

گام ۲ پس داریم: $\sigma_{\text{اول}} = \sqrt{5}$ یعنی انحراف معیار دسته اول $\sqrt{5}$ است.

۲۴- گزینه ۲

روش گام ۱ حداقل یک پناهی گل می شود یعنی هر دو خراب نشوند.

پس با استفاده از متمم داریم: $P(\text{هر دو خراب}) = 1 - P(\text{حداقل یک گل})$

گام ۲ شانس خراب کردن پناهی اول $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ است و اگر پناهی اول را گل نکند

شانس خراب کردن دومی $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ است. پس طبق قاعده ضرب احتمال، شانس خراب کردن هر دو پناهی $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ است.

گام ۳ جواب می شود: $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

روش گام ۱ اگر اصرار بر محاسبه مستقیم داشته باشیم، سه حالت در نظر می گیریم:

اولی گل و دومی گل یا اولی خراب و دومی گل یا اولی گل و دومی خراب

گام ۲ با توجه به اعداد سؤال داریم:

$$P(\text{حداقل یک گل}) = \frac{0}{8} \times \frac{0}{6} + \frac{0}{2} \times \frac{0}{5} + \frac{0}{8} \times \frac{0}{4}$$

$$\text{دومی خراب اولی گل دومی گل اولی خراب دومی گل اولی گل}$$

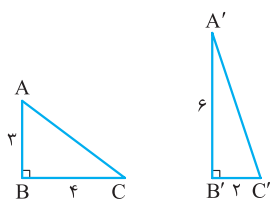
$$= \frac{0}{48} + \frac{0}{1} + \frac{0}{32} = \frac{0}{9}$$

۲۵- گزینه ۳

تک تک گزینه ها را بررسی می کنیم:

۱: مثال نقض مثلث های قائم الزامی زیراند:

مساحت جفتشان $\frac{3 \times 4}{2} = \frac{6 \times 2}{2} = \frac{12}{2} = 6$ است ولی همنهشت نیستند (حتی به ضلع برابر هم ندارند).



۲: مثلث ABC بالا، مثال نقض این گزینه هم هست. طول ارتفاع $BC = 4$ از طول سه

ضلع کوچک تر که نیست هیچ، بلکه از ضلع $AB = 3$ بزرگ تر هم هست.

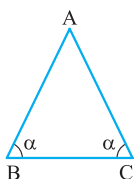
۳: فرض کنید در مثلث مقابل زوایای B و C مساوی باشند، این جوری

مثلث ABC متساوی الساقین و در نتیجه AB و AC برابر می شوند.

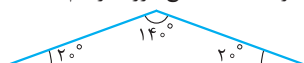
AB و AC هم که همان ضلع های مقابل به زوایای برابر B و C اند، پس

این گزینه درست است و مثال نقضی ندارد.

همین جا معلوم شد **گام ۳** جواب است، ولی تحلیل **گام ۴** را هم ببینید.



۴: مثال نقض این گزینه مثلث زیر است. در این مثلث بزرگ ترین زاویه، یعنی 140° ، از $4 \times 20^\circ = 80^\circ$ کوچک تر که نیست هیچ، بزرگ تر هم هست.



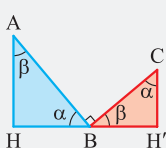
۲۶- گزینه ۴

درس نامه ۱ دو مثلث قائم الزامی با وترهای عمود بر هم،

همیشه متشابه اند.

مثلاً در شکل مقابل مثلث های ABH و BCH' با زوایای α و β

با هم متشابه اند.



گام ۱ پس تابع فقط ۱ نقطه ماکزیمم نسبی و صفر نقطه مینیمم نسبی دارد، یعنی $m = 1$ و $n = 0$ و بنابراین:

$$\frac{km+n}{k-n} = \frac{4(1)-0}{4-0} = \frac{4}{4} = 1$$

۲۱- گزینه ۱

گام ۱ کاپیتان باید اول یا دوم یا سوم باشد تا بازیکنان بیشتری «بعد» از او وارد شوند:

$$\begin{matrix} \text{XXXXX} & \text{XXXX} & \text{XXX} \\ \text{C} & \text{C} & \text{C} \\ \text{بعد} & \text{بعد} & \text{بعد} \end{matrix}$$

گام ۲ با مشخص شدن جای کاپیتان، برای ۵ نفر دیگر در هر حالت ۵ جایگشت داریم.

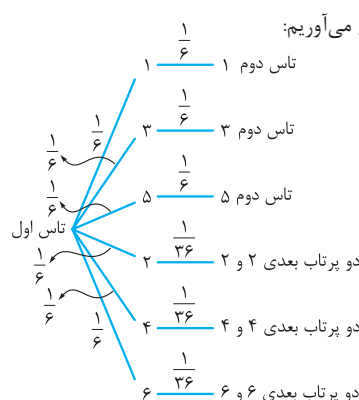
گام ۳ بنابراین طبق اصل جمع تعداد حالت ها برابر است با:

$$5! + 5! + 5! = 120 \times 3 = 360$$

۲۲- گزینه ۲

گام ۱ صورت سؤال می گوید اگر تاس ۱ یا ۳ یا ۵ بیاید ۱ بار دیگر و اگر ۲ یا ۴ یا ۶ بیاید دو بار دیگر پرتاب می کنیم. هدف این است که تمام ارقام روشده (دوتا یا سه تا) یکسان باشند.

گام ۲ سناریوی سؤال را در نمودار درختی می آوریم:

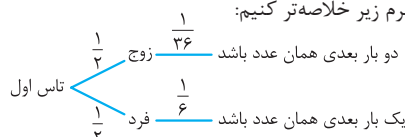


گام ۳ طبق فرمول احتمال کل، احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(3 \times \frac{1}{36}\right) + \left(3 \times \frac{1}{216}\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{72} = \frac{6+1}{72} = \frac{7}{72}$$

البته می توانستیم نمودار درختی را به فرم زیر خلاصه تر کنیم:



که باز هم جواب می شود: $P = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{72}$

۲۳- گزینه ۳

درس نامه ۱ واریانس n داده $X_1, X_2, \dots, X_n$ با میانگین $\bar{X}$ ، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sigma^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}$$

۲ هر وقت از بین تعدادی داده یکی از آن ها را حذف کنیم ولی هم چنان میانگین داده ها تغییری نکند، آن عدد حذف شده حتماً با میانگین برابر است.

گام ۱ صورت سؤال می گوید در دسته اول ۴ داده b, c, d, e و در دسته دوم ۵ داده a, b, c, d, e داریم.

گام ۲ چون میانگین دو دسته برابر است، باید تنها داده متفاوت یعنی a ، برابر میانگین باشد:

$$a = \frac{b+c+d+e}{4}$$

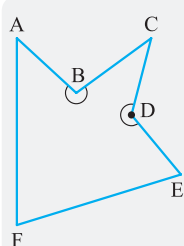
گام ۳ فرمول محاسبه واریانس ها را می نویسیم:

$$\sigma_{\text{اول}}^2 = \frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2}{4}$$

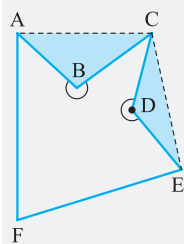
اسم این S را بگذاریم.

10

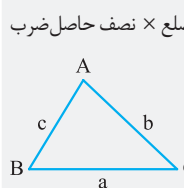
گزینه ۳ - ۳۱



درس نامه ۱ به شش ضلعی مقابل که بعضی از زاویه‌های داخلی اش ($\hat{B}$ و $\hat{D}$) بیشتر از 18° هستند؛ نگاه کنید. مساحت این جور چندضلعی‌ها را می‌توانیم زیاد کنیم؛ جوری که محیطشان تغییری نکند. برای این‌که بفهمیم چقدر می‌توانیم مساحت را زیاد کنیم، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

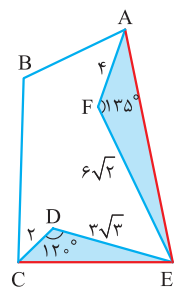


در کدام رأس‌های چندضلعی، زاویه داخلی بیشتر از 18° داریم؟
B و D؛ رأس‌های کنار B، یعنی A و C و همین‌طور رأس‌های کنار D، یعنی C و E را مثل شکل مقابل به هم وصل می‌کنیم.
میزان افزایش مساحت، دو برابر مساحت قسمت‌های رنگی مقابل است، یعنی: $2S_{ABC} + 2S_{CDE}$ = میزان افزایش مساحت



مساحت هر مثلث را می‌توانیم از رابطه «سینوس زاویه بین همان دو ضلع $\times$ نصف حاصل ضرب دو ضلع $S =$ » به دست بیاوریم؛ این یعنی برای مساحت مثلث مقابل، می‌توانیم رابطه‌های زیر را بنویسیم:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C} \text{ یا } \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} \text{ یا } \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$$



گام ۱ (تشخیص میزان افزایش مساحت) طبق مورد (۱) درس‌نامه، میزان افزایش مساحت چندضلعی ABCDEF به شرط ثابت ماندن محیط و تعداد اضلاعش، دو برابر مساحت مثلث‌های رنگی است؛ یعنی:

$$2S_{CDE} + 2S_{AFE} = \text{میزان افزایش مساحت} (*)$$

گام ۲ (محاسبه میزان افزایش مساحت) در ادامه به کمک مورد (۲) درس‌نامه، مساحت مثلث‌های AFE و CDE را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{CDE} = \frac{1}{2}(2)(2\sqrt{3}) \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \\ S_{AFE} = \frac{1}{2}(4)(6\sqrt{2}) \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} (24\sqrt{2}) = 6 \times 2 = 12 \end{cases}$$

در آخر موارد بالا را در تساوی (*) جای‌گذاری می‌کنیم تا به خواسته سؤال برسیم:

$$2\left(\frac{9}{2}\right) + 2(12) = 9 + 24 = 33 = \text{میزان افزایش مساحت}$$

گزینه ۴ - ۳۲

درس نامه

۱ وارون ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

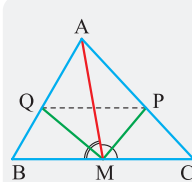
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

۳ طرفین یک تساوی ماتریسی مثل $B = C$ را می‌توانیم در ماتریس دلخواه A ضرب کنیم. فقط باید حواسمان باشد A را از یک سمت ضرب کنیم؛ یا از چپ تا به تساوی $AB = AC$ یا از راست تا به تساوی $BA = CA$ برسیم.

گام ۱ (تحلیل خواسته سؤال) اول به کمک مورد (۳) درس‌نامه، طرفین تساوی

$$3I - 2A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \text{ را از سمت راست در } B^{-1} \text{ ضرب می‌کنیم تا خواسته}$$

گزینه ۴ - ۳۰



درس نامه ۱ به شکل مقابل که مربوط به یکی از تمرین‌های مهم کتاب درسی است، نگاه کنید. در این شکل AM میانه و MP و MQ نیمسازهای زاویه‌های AMC و AMB هستند. در مورد این شکل، دو نکته مهم زیر را باید بلد باشید:

الف) PQ با BC موازی است.

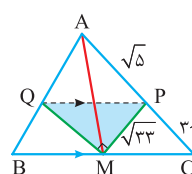
ب) نیمسازهای سبز رنگ بر هم عمودند، این یعنی مثلث PMQ قائم‌الزاویه است.

۲ نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع کناری‌اش قطع می‌کند؛ این یعنی اگر در شکل مقابل AD نیمساز باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

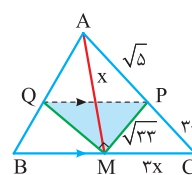
برای محاسبه طول این نیمساز هم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$AD^2 = AB.AC - BD.DC$$



گام ۱ (رسم شکل مناسب و تحلیل آن) شکل مسئله به صورت مقابل است.

همان‌طور که می‌بینید؛ طبق مورد (۱) درس‌نامه، این همان شکل مهم کتاب درسی است که در آن مثلث رنگی قائم‌الزاویه و $PQ \parallel BC$ بود.



گام ۲ (محاسبه طول BC) خوب به مثلث رنگی مقابل نگاه کنید. در این مثلث، MP نیمساز است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{MC}{AM} = \frac{PC}{AP} \Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{3}{1} \Rightarrow MC = 3x, AM = x$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه برای طول نیمساز $MP = \sqrt{33}$ هم می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$MP^2 = AM.MC - AP.PC$$

$$\Rightarrow (\sqrt{33})^2 = (x)(3x) - (\sqrt{5})(3\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow 33 = 3x^2 - 15 \Rightarrow 3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

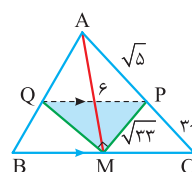
بنابراین طول MC می‌شود $3x = 12$.

M وسط BC است، بنابراین طول BC می‌شود: $BC = 2MC = 2 \times 12 = 24$

گام ۳ (محاسبه طول PQ) در گام (۱) گفتیم در مثلث ABC، PQ و BC موازی‌اند، پس می‌توانیم در مثلث ABC تالس جزء به کل بنویسیم:

$$\frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 3\sqrt{5}} = \frac{PQ}{24} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{PQ}{24} \Rightarrow PQ = 6$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال) در آخر به مثلث قائم‌الزاویه رنگی زیر نگاه کنید. در این مثلث طول MP و PQ را داریم، پس می‌توانیم به کمک قضیه فیثاغورس، طول MQ را هم به دست بیاوریم:



$$\begin{aligned} MP^2 + MQ^2 &= PQ^2 \\ \Rightarrow (\sqrt{33})^2 + MQ^2 &= 6^2 \\ \Rightarrow MQ^2 &= 36 - 33 = 3 \Rightarrow MQ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

۴ اگر در سهمی y^2 وجود داشته باشد، سهمی افقی است. در این جور سهمی ها معادله خط هادی از این رابطه به دست می آید:

پارامتر سهمی
 $x = -a$ طول رأس

گام ۱ (پیدا کردن طول رأس سهمی) در معادله گسترده سهمی، y^2 داریم، پس طبق مورد (۱) درس نامه، اگر نسبت به y مشتق بگیریم، عرض رأس سهمی پیدا می شود:

$$y^2 - 2y + 4x = a \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

حالا $y = 1$ را در معادله سهمی جای گذاری می کنیم تا به طول رأس سهمی برسیم (مورد (۲) درس نامه):

$$1^2 - 2(1) + 4x = a \Rightarrow 4x - 1 = a \Rightarrow 4x = a + 1 \Rightarrow x = \frac{a+1}{4}$$

طول رأس

گام ۲ (محاسبه پارامتر سهمی) به کمک مورد (۳) درس نامه، پارامتر سهمی ضریب تغییر درجه ۱

$$y^2 - 2y + 4x - a = 0 \quad \text{را به دست می آوریم؛ فقط چون در معادله سهمی } a \text{ داریم،}$$

ضریب تغییر درجه ۲

$$A = -\frac{\text{ضریب متغیر درجه ۱}}{\text{ضریب متغیر درجه ۲}} = -\frac{4}{4} = -1$$

پارامتر سهمی را A در نظر می گیریم:

گام ۳ (نوشتن معادله خط هادی) طبق مورد (۴) درس نامه، معادله خط هادی را به این صورت بنویسیم:

$$x = -A \Rightarrow x = \frac{a+1}{4} - (-1) \Rightarrow x = \frac{a+1}{4} + 1$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سوال) سوال معادله خط هادی را به صورت $x = 3$ داده. از مقایسه این معادله با معادله آبی رنگ بالا نتیجه می گیریم که:

$$\frac{a+1}{4} + 1 = 3 \Rightarrow \frac{a+1}{4} = 2 \Rightarrow a+1 = 8 \Rightarrow a = 7$$

۳۵ - گزینه ۳

درس نامه ۱ هر وقت وسط ضلع های یک مثلث مثل شکل مقابل را به هم وصل کنیم، ۴ مثلث هم نهشت درست می شود؛ این یعنی مساحت مثلث MNP ، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABC است.

۲ اگر مطابق شکل روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یک مثلث بسازیم، مساحتش برابر می شود با:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

۳ ضرب خارجی بردارهای $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به این صورت محاسبه می شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

منفی یاد تیره

۴ اگر A و B مختصات ابتدا و انتهای بردار $\overrightarrow{AB}$ باشند، مؤلفه های این بردار را می توانیم به کمک رابطه زیر به دست بیاوریم:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

ابتدا انتها

۵ طول بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

گام ۱ (محاسبه مساحت مثلث ABC) فرض می کنیم A ، B و C وسط اضلاع مثلث به مساحت ۱۶ باشند، اینجوری طبق مورد (۱) درس نامه، مساحت مثلث ABC می شود:

$$S_{ABC} = \frac{1}{4} \times 16 = 4$$

سوال، یعنی $3B^{-1} - 2A^{-1}$ را بسازیم:

$$(3I - 2A^{-1}B)B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} B^{-1}$$

$$\Rightarrow 3B^{-1} - 2A^{-1}BB^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} B^{-1}$$

$$\Rightarrow 3B^{-1} - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} B^{-1} (*)$$

طبق رابطه بالا، برای محاسبه خواسته سوال، ماتریس B^{-1} را لازم داریم.

گام ۱ (محاسبه درایه های B^{-1}) وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ را به کمک مورد (۱) درس نامه به دست می آوریم:

$$B^{-1} = \frac{1}{(-2)(-1) - (-3)(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سوال) حالا ماتریس $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ را در تساوی (*) جای گذاری می کنیم:

$$3B^{-1} - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}$$

کوچک ترین درایه ماتریس بالا -۱۱ است.

۳۳ - گزینه ۴

گام ۱ (محاسبه A^2) اول A را در خودش ضرب می کنیم تا به A^2 برسیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سوال) $A^2 = A$ شد، پس ضرب درایه های A و A^2 مساوی هم و در نتیجه نسبت ضرب درایه های A به A^2 می شود ۱.

تیزبازی اول نکته زیر را بخوانید:

نکته هر وقت یک سطر از ماتریسی مثل A انتخاب کردید و دیدید تمام سطرهای دیگر A مضربی از آن سطر هستند؛ می توانید A^2 را خیلی سریع به این صورت محاسبه کنید: $A^2 = A \times A$ (مجموع درایه های قطر اصلی A) اگر اتفاق بالا برای ستون های یک ماتریس هم افتاد، باز هم می توانید رابطه بالا را بنویسید. یک لحظه سطر سوم و ارتباطش با بقیه سطرهای A را ببینید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

همان طور که می بینید؛ تمام سطرهای A ، مضربی از سطر سوم هستند، پس طبق نکته بالا A^2 برابر می شود با: $A^2 = A \Rightarrow A^2 = A$ (مجموع درایه های قطر اصلی A) ادامه حل هم مثل روش قبل است.

۳۴ - گزینه ۲

درس نامه ۱ در معادله گسترده سهمی، اگر نسبت به متغیر درجه دوم مشتق بگیریم، یا عرض رأس پیدا می شود یا طولش. احتمالا می پرسید «چطور تشخیص بدهیم؟» باید خدمتان عرض کنیم که اگر متغیر درجه دوم، x بود، طول رأس و اگر متغیر درجه دوم، y بود، عرض رأس پیدا شده است.

۲ مختصات رأس سهمی در معادله اش صدق می کند.

۳ هر وقت معادله گسترده سهمی را داشتید و مقدار پارامتر آن، یعنی a را می خواستید؛ از رابطه مقابل استفاده کنید:

$$a = -\frac{\text{ضریب متغیر درجه ۱}}{\text{ضریب متغیر درجه ۲}} \times 4$$

منفی یاد تیره

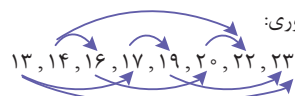
۳۷- گزینه ۳

شفاف سازی بایبید فرض کنیم a و b بزرگترین و کوچکترین عضو یکی از زیرمجموعه‌ها باشد. سؤال می‌خواهد میانگین این دو عدد بر ۳ بخش پذیر باشد، پس باید بنویسیم:

$$\frac{a+b}{2} = 3k \Rightarrow a+b = 6k$$

بنابراین «میانگین کوچکترین و بزرگترین عضو بر ۳ بخش پذیر است»، یعنی مجموع بزرگترین و کوچکترین عضو، مضرب ۶ است.

گام ۱ باید ببینیم در چند حالت، مجموع دو عضو از مجموعه $A = \{13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23\}$ مضرب ۶ می‌شود. برای این کار همه اعضای این مجموعه را به صورت زیر کنار هم می‌نویسیم و برای هر عدد از خودمان می‌پرسیم اگر این عدد کوچکترین عضو مجموعه باشد، بزرگترین عضو، کدام یک از اعداد بعدی می‌تواند باشد؟ آن عدد را به همان اعداد با فلش وصل می‌کنیم، این جوری:



گام ۲ با توجه به فلش‌های بالا، مجموعه‌ها را می‌توانیم به ۸ حالت زیر تقسیم کنیم:

(۱)	(۲)
می‌تواند باشد یا نباشد. $\{13, 14, 16, 17\}$	می‌تواند باشد یا نباشد. $\{13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23\}$
(۳)	(۴)
عضوی بیش‌از حد ندارد. $\{14, \text{○}, 16\}$	می‌تواند باشد یا نباشد. $\{14, 16, 17, 19, 20, 22\}$
(۵)	(۶)
می‌تواند باشد یا نباشد. $\{16, 17, 19, 20\}$	عضوی بیش‌از حد ندارد. $\{17, \text{○}, 19\}$
(۷)	(۸)
می‌تواند باشد یا نباشد. $\{19, 20, 22, 23\}$	عضوی بیش‌از حد ندارد. $\{20, \text{○}, 22\}$

گام ۳ حالا باید ببینیم با در هر حالت چندتا زیرمجموعه می‌توانیم بسازیم:

- حالت (۱): در این حالت ۱۳ و ۱۷ که در زیرمجموعه هستند، اما ۱۴ و ۱۶ هر کدام دو حالت دارند، یا هستند یا نیستند؛ پس تعداد زیرمجموعه‌های این مدل « $2^2 = 4$ » تا است.
- حالت (۲): در این حالت ۲۳ و ۱۳ که در زیرمجموعه هستند، اما هر کدام از ۶ عدد $\{14, 16, 17, 19, 20, 22\}$ دو حالت دارند، یا هستند یا نیستند، پس تعداد زیرمجموعه‌های این حالت برابر « $2^6 = 64$ » تا است.

بقیه حالت‌ها: همین جور اگر پیش برویم، تعداد زیرمجموعه‌های مربوط به حالت‌های (۳) تا (۸) به ترتیب برابر $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ هستند. بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌ها می‌شود:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 4 + 64 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 4 + 64 = 127$$

۳۸- گزینه ۲

درس نامه ۱ معادله سیاله $ax + by = c$ به شرطی جواب دارد که ب.م.م. $(a, b) | c$ ضرایب، c را عاد کند، یعنی:

هر وقت سمت راست یک بخش پذیری، عبارتی پارامتری و سمت چپ یک عدد معلوم بود، بخش پذیری را به هم نهشتی تبدیل می‌کنیم، مثلاً بخش پذیری $53 | 7n + 1$ را این جوری به هم نهشتی تبدیل می‌کنیم:

$$7n + 1 \equiv 0 \pmod{53}$$

هر هم نهشتی مثل $a \equiv b \pmod{m}$ را به این صورت می‌توانیم به یک تساوی تبدیل کنیم:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = mk + b$$

گام ۱ طبق مورد (۱) درس نامه، معادله $51x + 85y = 7a - 1$ به شرطی جواب دارد که: $(51, 85) | 7a - 1$

گام ۱ (محاسبه برداری مساحت) اول شکل فرضی مقابل را می‌کشیم. به کمک مورد (۴) درس نامه، بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را به دست می‌آوریم:

$A(a, 4, 1)$
 $B(a, b, 3)$
 $C(a, 9, b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (a, b, 3) - (a, 4, 1) = (0, b-4, 2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (a, 9, b) - (a, 4, 1) = (0, 5, b-1) \end{cases}$$

حالا می‌توانیم به کمک مورد (۳) درس نامه، $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ را به دست بیاوریم:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b-4 & 2 \\ 5 & b-1 \end{vmatrix} = (b^2 - 5b - 6, 0, 0)$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) در آخر مساحت را به کمک موردهای (۲) و (۵) درس نامه، به دست می‌آوریم و مساوی ۴ می‌گذاریم:

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 0^2 + (b^2 - 5b - 6)^2} = 4$$

$$\Rightarrow |b^2 - 5b - 6| = 8 \Rightarrow \begin{cases} b^2 - 5b - 6 = 8 \Rightarrow b^2 - 5b - 14 = 0 \\ b^2 - 5b - 6 = -8 \Rightarrow b^2 - 5b + 2 = 0 \end{cases}$$

دلتای هر دو معادله بالا مثبت است، پس هر دو جواب دارند. مجموع جواب‌های معادله اول $S_1 = -\frac{-5}{1} = 5$ و مجموع جواب‌های معادله دوم $S_2 = -\frac{-5}{1} = 5$ است، پس مجموع کل مقادیر b می‌شود $5 + 5 = 10$.

۳۹- گزینه ۱

درس نامه ۱ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر m برابر r باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{matrix} m \\ a \equiv r \end{matrix}$$

اگر طرفین یک هم نهشتی به پیمانه m بر عددی صحیح مثل $a \neq 0$ بخش پذیر باشد، می‌توانیم a را از طرفین هم نهشتی بزنیم، اما باید حواسمان باشد که پیمانه (m) را هم بر $(a, m) = d$ تقسیم کنیم؛ یعنی:

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{r}{d} \pmod{\frac{m}{d}} \Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{r}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

در هم نهشتی می‌توانیم مضارب مختلف پیمانه را به طرفین هم نهشتی اضافه یا کم کنیم:

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{r}{d} \pmod{\frac{m}{d}} \Leftrightarrow \frac{a}{d} \pm \frac{mq}{d} \equiv \frac{r}{d} \pm \frac{mq}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$

گام ۱ به گفته سؤال باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۷ برابر ۱۱ است، پس طبق مورد (۱) درس نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{17} \equiv \frac{11}{17} \pmod{1}$$

از طرفی سؤال می‌گوید a مضرب ۶ است، پس در هم نهشتی بالا به جای a می‌نویسیم $6k$:

$$\frac{6k}{17} \equiv \frac{11}{17} \pmod{1}$$

گام ۲ باقی‌مانده تقسیم $\frac{a}{3} = \frac{6k}{3} = 2k$ بر ۱۷ را می‌خواهیم، به همین خاطر باید سعی کنیم طرفین هم نهشتی بالا را بر ۳ تقسیم کنیم. برای این کار از موردهای (۲) و (۳) درس نامه کمک می‌گیریم:

$$\frac{6k}{17} \equiv \frac{11}{17} \pmod{1} \xrightarrow{\div 3} \frac{2k}{17} \equiv \frac{11}{17} \pmod{1} \xrightarrow{+17} 2k \equiv 11 \pmod{17}$$

از هم نهشتی بالا نتیجه می‌گیریم که باقی‌مانده تقسیم $2k$ بر ۱۷ برابر ۱۵ است.

تیز بازی سعی می‌کنیم عددی پیدا کنیم که شرایط مسئله را داشته باشد. به گفته سؤال باقی‌مانده a بر ۱۷ برابر ۱۱ است، پس $a = 17k + 11$ می‌شود. a مضرب ۶ و در نتیجه زوج است، پس k باید فرد باشد. به ازای $k = 1, 3, 5, \dots$ مضرب ۶ نمی‌شود، ولی به ازای $k = 5$ این اتفاق می‌افتد:

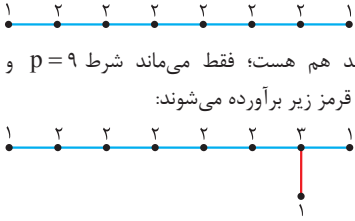
$$a = 17(5) + 11 = 85 + 11 = 96$$

الان می‌توانیم بگوییم $\frac{a}{3} = 32$ و باقی‌مانده‌اش بر ۱۷ برابر ۱۵ است.

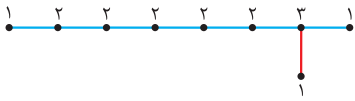
گام ۵ حالا $p = 9$ ، $\Delta(G) = 7$ و $\delta(G) = 5$ را در تساوی‌های (۱) و (۲) جای گذاری می‌کنیم تا به $\Delta(\bar{G})$ و $\delta(\bar{G})$ برسیم:

$$\begin{cases} \Delta(\bar{G}) = 9 - 1 - 5 = 3 \\ \delta(\bar{G}) = 9 - 1 - 7 = 1 \end{cases}$$

گام ۶ حالا باید سعی کنیم $\bar{G}$ را با ۹ رأس طوری بکشیم که بزرگ‌ترین درجه‌اش ۳، کوچک‌ترین درجه‌اش ۱ و همبند باشد. تازه کم‌ترین تعداد یال را هم باید استفاده کنیم. اول ۷ تا یال بین ۸ تا رأس به این صورت می‌کشیم:



گراف بالا شرط $\delta(\bar{G}) = 1$ را دارد، همبند هم هست؛ فقط می‌ماند شرط $p = 9$ و $\Delta(\bar{G}) = 3$ که آن‌ها هم با اضافه کردن یال قرمز زیر برآورده می‌شوند:



پس حداقل اندازه ممکن برای $\bar{G}$ برابر ۸ است.

متأسفانه سازمان سنجش به اشتباه (۳) را به عنوان جواب انتخاب کرده.

فیزیک

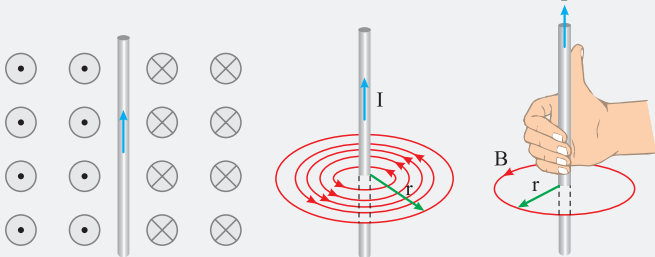
۴۱- گزینه ۱

درس‌نامه ضربه قدرت در ماشین درون‌سوز بنزینی؛ در این مرحله در اثر فشار زیاد، مخلوط منبسط می‌شود و این انبساط به سرعت رخ می‌دهد؛ بنابراین می‌توان آن را بی‌دررو در نظر گرفت. در نتیجه در این انبساط، فشار و دمای مخلوط کاهش می‌یابد. در این مرحله مخلوط، پیستون را به شدت به پایین می‌راند و روی آن کار انجام می‌دهد.

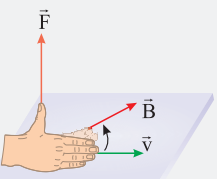
با توجه به درس‌نامه، در ضربه قدرت پیستون پایین می‌آید و فشار و دمای گاز کاهش می‌یابد. **مشاوره** طرح سؤال از مراحل کار ماشین گرمایی درون‌سوز بنزینی در کنکور نوبت اول ۱۴۰۳ رشته ریاضی و هم‌چنین در این آزمون، زنگ هشدار است برای شما که به سادگی از کنار این مباحث نگذرید.

۴۲- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ میدان مغناطیسی در اطراف سیم حامل جریان؛ وقتی که از یک سیم، جریان الکتریکی عبور می‌کند، در اطراف آن میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. طبق قاعده دست راست، اگر سیم را طوری در دست راست خود بگیریم که انگشت شست دست راست در جهت جریان باشد، جهت خم شدن چهار انگشت، جهت میدان مغناطیسی در اطراف آن را نشان می‌دهد.



۲ برای تشخیص جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار، از قاعده دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست خود را در جهت حرکت ذره با بار مثبت ($\vec{v}$) قرار بدهیم به طوری که وقتی آن را خم می‌کنیم در جهت میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار مثبت ($\vec{F}$) را نشان می‌دهد. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است.



♦ برای تشخیص جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار با بار منفی، قاعده دست راست را می‌توانید با دست چپتان اجرا کنید.

$51 = 17 \times 3$ و $85 = 17 \times 5$ پس $(51, 85)$ می‌شود ۱۷. بنابراین شرط وجود جواب به این صورت شد:

گام ۳ سمت راست بخش‌پذیری بالا یک عبارت پارامتری و سمت چپش عدد معلوم ۱۷ است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، اول آن را به همنهشتی تبدیل کرده، بعد معادله همنهشتی را حل می‌کنیم:

$$17 \mid 7a - 1 \Rightarrow 7a \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 7a \equiv 35 \pmod{17} \xrightarrow{(+7 \times 17)} a \equiv 5 \pmod{17} \Rightarrow a = 17k + 5$$

گام ۴ به ازای $k = 2$ به $a = 2(17) + 5 = 39$ می‌رسیم که در (۲) حضور دارد، پس همین گزینه جواب است.

۳۹- گزینه ۴

درس‌نامه در مسائل اصل لانه‌کبوتری وقتی می‌خواهیم مطمئن باشیم اتفاق خاصی رخ نمی‌دهد، بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم؛ یعنی مثلاً ابتدا تمام اعدادی که نمی‌خواهیم باشند انتخاب می‌کنیم و بعد سراغ اعداد مطلوب می‌رویم.

گام ۱ باید تا آخرین نفس با سؤال لج کنیم. برای این کار مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10, 12, 13, 14, \dots, 20\}$ تا جای ممکن به زیرمجموعه‌هایی تقسیم کنیم که اعضایان ۳ عدد متوالی اند:

$$\{1, 2, 3\} - \{4, 5, 6\} - \{7, 8, 9\} - \{10\} - \{12, 13, 14\} - \{15, 16, 17\} - \{18, 19, 20\}$$

گام ۲ چون لج کردیم، از هر کدام از مجموعه‌های ۳ عضوی تا برمی‌داریم، ۱۰ را هم برمی‌داریم، فقط باید حواسمان باشد که از مجموعه $\{7, 8, 9\}$ دو عضوی که برمی‌داریم ۸، ۹ نباشند، چون این جوری ۸، ۹، ۱۰ سه‌تا عدد متوالی‌اند و خواسته مسئله برآورده می‌شود. فرض کنید این عددها را برداشتیم:

گام ۳ تا این‌جا ۱۳ عدد برداشتیم و هیچ سه‌تا عدد متوالی‌ای نداریم، اما به محض این‌که چهاردهمی را برداریم خواسته مسئله برآورده می‌شود.

۴۰- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ بزرگ‌ترین عدد در بین درجه رأس‌های گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترینش را با $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

۲ فرض کنید G یک گراف از مرتبه p باشد، در این صورت $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ و همین‌طور $\Delta(\bar{G})$ و $\delta(\bar{G})$ رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1 \quad \text{و} \quad \Delta(\bar{G}) + \delta(G) = p - 1$$

۳ گراف G با $\Delta(G)$ حداقل مرتبه‌اش برابر $p = \Delta(G) + 1$ است.

۴ در گراف کامل K_p ، درجه همه رأس‌ها « $p - 1$ » و تعداد یال‌ها « $q = \frac{p(p-1)}{2}$ » است.

گام ۱ طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \Delta(\bar{G}) + \delta(G) = p - 1 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = p - 1 - \delta(G) & (1) \\ \Delta(G) + \delta(\bar{G}) = p - 1 \Rightarrow \delta(\bar{G}) = p - 1 - \Delta(G) & (2) \end{cases}$$

گام ۲ طرفین رابطه‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) &= (p - 1 - \delta(G)) - (p - 1 - \Delta(G)) \\ \Rightarrow \Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) &= \Delta(G) - \delta(G) \end{aligned}$$

به گفته سؤال $\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = 2$ است، پس تساوی بالا به این صورت درمی‌آید:

$$\Delta(G) - \delta(G) = 2$$

گام ۳ معادله بالا به همراه شرط $\Delta(G) + 2\delta(G) = 12$ در دستگاه دو معادله - دو مجهول جواب‌های $\delta(G) = 5$ و $\Delta(G) = 7$ را می‌دهد.

گام ۴ طبق مورد (۳) درس‌نامه، در گراف با $\Delta(G) = 7$ حداقل تعداد رأس یا همان مرتبه برابر $p = 7 + 1 = 8$ است. اما باید حواسمان باشد که با جای گذاری $p = 8$ و $\Delta(G) = 7$ در رابطه (۲) به $\delta(\bar{G}) = 0$ می‌رسیم؛ ببینید:

در این حالت $\bar{G}$ همبند نمی‌شود چون رأس با درجه صفر داریم؛ پس باید $p = 9$ باشد. بنابراین G و $\bar{G}$ ، ۹ تا رأس دارند.

مشاوره در این سؤال، نه فرمول به کارتان می‌آید و نه مقادیر داده‌شده! بلکه باید رفتار القاگر آرمانی به لحاظ انرژی را بلد باشید. اگر مفاهیم را به خوبی درک کنید، از علم (مفهوم‌ها) فیزیک بسیار لذت می‌برید.

۴۵- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ انرژی پتانسیل گرانشی: اگر جسمی با جرم m در ارتفاع h نسبت به سطح زمین قرار بگیرد، آن‌گاه انرژی پتانسیل گرانشی آن از رابطه زیر به دست می‌آید (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح زمین فرض کردیم).

$$U = mgh$$

ارتفاع (m) جرم (kg)
شتاب گرانش (m/s^2)

۲ انرژی جنبشی جسمی که با تندی v در حال حرکت است:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

جرم (kg)

۳ انرژی مکانیکی: به مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل جسم، انرژی مکانیکی می‌گوییم.

$$E = K + U$$

انرژی پتانسیل (J)
انرژی جنبشی (J)

۴ اگر در طول مسیر حرکت جسم، نیروهای اتلافی (مانند اصطکاک و مقاومت هوا) بر آن وارد شوند و بر روی جسم کار منفی انجام دهند، انرژی مکانیکی جسم کاهش می‌یابد. کار این نیروها (W_f) در یک مسیر معین، برابر با اختلاف انرژی مکانیکی جسم در ابتدا و پایان مسیر است.

کار مقاومت هوا در مسیر، برابر با اختلاف انرژی مکانیکی جسم در ابتدا و پایان مسیر است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم (مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را در سطح زمین در نظر گرفتیم):

$$W_f = E_p - E_1 = (K_p + U_p) - (K_1 + U_1) = K_p - K_1 + U_p - U_1$$

$$\xrightarrow{K_1=J, U_p=J} W_f = \frac{1}{2}mv_p^2 - mgh_1$$

$$\xrightarrow{K_p=\frac{1}{2}mv_p^2, U_1=mgh_1} W_f = -16J, m=\frac{W}{g}=\frac{-16}{10}kg$$

$$\xrightarrow{g=10m/s^2, h_1=22m} -16 = \frac{1}{2} \times \frac{-16}{10} \times v_p^2 - 10 \times 22$$

$$\Rightarrow v_p^2 = 400 \Rightarrow v_p = 20 m/s$$

۴۶- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ چگالی مخلوط:

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

چگالی مایع دوم
چگالی مایع اول
حجم مایع دوم
حجم مایع اول

یکی از یکاهای متداول چگالی، یکای g/cm^3 است. برای تبدیل یکای g/cm^3 به kg/m^3 و برعکس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{g}{cm^3} \xrightarrow{\frac{1000}{1000}} \frac{kg}{m^3}$$

این را هم بدانید که $1 mL = 1 cm^3$ است.

۲ فشار کل در عمق h از سطح آزاد مایع:

$$P = \rho g h + P_0$$

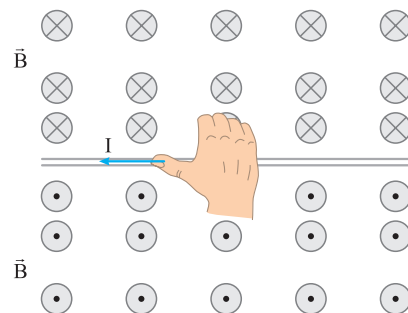
عمق (m) چگالی مایع (kg/m^3)
فشار جو (Pa)
شتاب گرانش (m/s^2)

۳ فشار پیمانه‌ای (P_g): اختلاف فشار مطلق و فشار جو.

$$P_g = P - P_0$$

فشار مطلق
فشار جو

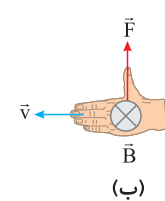
تشخیص جهت جریان در سیم: همان‌طور که در شکل می‌بینید، جهت میدان مغناطیسی در بالای سیم به صورت درون‌سو و در پایین آن برون‌سو است. انگشت شست دست راستمان را باید طوری در راستای سیم قرار بدهیم که وقتی چهار انگشتان را خم می‌کنیم، از بالای سیم به سمت داخل برود و از پایین آن خارج شود. اگر انگشت شست دست راست را به سمت چپ قرار بدهیم، این حالت رخ می‌دهد (شکل (الف)).



(الف)

تشخیص جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون: بار الکتریکی الکترون منفی است (امیدواریم مواسف بوده‌اید که گفته الکترون)، پس می‌توانیم قاعده دست راست را با دست چپمان اجرا کنیم. طبق

این قاعده، چهار انگشت دست چپمان را در جهت حرکت الکترون (سمت چپ) قرار می‌دهیم، به طوری که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم، در جهت میدان مغناطیسی (درون‌سو) قرار بگیرد. در این حالت، انگشت شست دست چپمان، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون (سمت بالا) را نشان می‌دهد (شکل (ب)).



(ب)

تله اگر حواستان به منفی بودن بار الکتریکی الکترون نباشد، به گزینه نادرست ۱ می‌رسید.

۴۲- گزینه ۳

استراتژی در فرایندهای واپاشی، عدد جرمی و عدد اتمی قبل از فرایند را به ترتیب برابر با مجموع عدد جرمی‌ها و مجموع عدد اتمی‌ها پس از فرایند قرار بدهید. با این روش می‌توانید عدد جرمی و عدد اتمی هسته دختر را پیدا کنید.

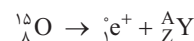
درس‌نامه ۱ تعداد نوترون‌های هسته، برابر با اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی آن است.

$$N = A - Z$$

نماد عنصر
عدد جرمی
عدد اتمی
عدد نوترونی
عدد اتمی

۲ فرایند واپاشی β^+ (پوزیترون) با رابطه مقابل بیان می‌شود: ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + {}_1^0e^+$

گام ۱ ابتدا فرایند این واپاشی را می‌نویسیم (هسته دختر را با ${}_Z^AY$ نشان دادیم).



گام ۲ تعداد نوکلئون‌ها قبل و پس از فرایند یکسان است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$15 = 0 + A \Rightarrow A = 15$$

$$8 = 1 + Z \Rightarrow Z = 7$$

گام ۳ حالا تعداد نوترون‌های هسته ${}_{15}^7Y$ را به دست می‌آوریم.

$$N = A - Z \xrightarrow{\frac{A=15}{Z=7}} N = 15 - 7 = 8$$

۴۴- گزینه ۱

رفتار مقاومت الکتریکی و القاگر آرمانی را از نظر انرژی اشتباه نگیرید! وقتی جریان الکتریکی از مقاومت عبور می‌کند، جریان چه پایا باشد و چه تغییر کند، انرژی وارد آن می‌شود و این انرژی در مقاومت به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود، اما در یک القاگر آرمانی، تنها وقتی انرژی وارد القاگر آرمانی می‌شود که جریان الکتریکی در آن افزایش یابد و این انرژی در میدان مغناطیسی القاگر آرمانی ذخیره شده و هنگام کاهش جریان، آزاد می‌شود. وقتی جریان الکتریکی پایا از یک القاگر آرمانی عبور کند، انرژی به آن وارد یا از آن خارج نمی‌شود. در این سؤال هم، چون جریان الکتریکی پایا است، پس انرژی الکتریکی به آن وارد یا از آن خارج نمی‌شود.

۴ سرعت متوسط متحرک:

جابه‌جایی (m)

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

زمان (s)

گام ۳ سرعت دو متحرک در لحظه‌های $t_1 = 4$ s و $t_2 = 8$ s را حساب می‌کنیم.

$$v_{1A} = a_{1A} \Delta t_1 + v_0 \xrightarrow{a_{1A} = 2/5 \text{ m/s}^2, v_0 = 0 \text{ m/s}} v_{1A} = 2/5 \times 4 = 1.6 \text{ m/s}$$

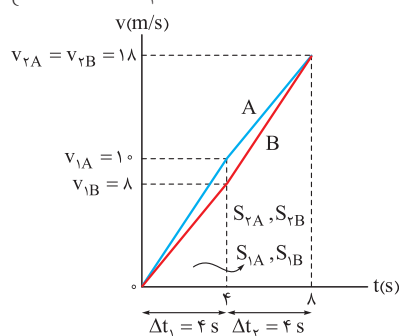
$$v_{2A} = a_{2A} \Delta t_2 + v_{1A}$$

$$\xrightarrow{a_{2A} = 2 \text{ m/s}^2, v_{1A} = 1.6 \text{ m/s}} v_{2A} = 2 \times 4 + 1.6 = 9.6 \text{ m/s}$$

$$v_{1B} = a_{1B} \Delta t_1 + v_0 \xrightarrow{a_{1B} = 2 \text{ m/s}^2, v_0 = 0 \text{ m/s}} v_{1B} = 2 \times 4 = 8 \text{ m/s}$$

$$v_{2B} = a_{2B} \Delta t_2 + v_{1B}$$

$$\xrightarrow{a_{2B} = 2/5 \text{ m/s}^2, v_{1B} = 8 \text{ m/s}} v_{2B} = 2/5 \times 4 + 8 = 9.6 \text{ m/s}$$



گام ۳ با سرعت‌هایی که در گام اول

حساب کردیم، نمودار سرعت - زمان دو متحرک را به صورت شکل مقابل رسم می‌کنیم و مساحت محصور هر کدام از نمودارها را در ۴ ثانیه اول و ۴ ثانیه دوم حساب می‌کنیم.

$$\Delta x_{1A} = S_{1A} = \frac{1.6 \times 4}{2} = 3.2 \text{ m}$$

$$\Delta x_{2A} = S_{2A} = \frac{1.6 + 9.6}{2} \times 4 = 22.4 \text{ m}$$

$$\Delta x_{1B} = S_{1B} = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \text{ m}$$

$$\Delta x_{2B} = S_{2B} = \frac{8 + 9.6}{2} \times 4 = 33.6 \text{ m}$$

گام ۴ حالا نسبت سرعت متوسط متحرک B به سرعت متوسط متحرک A در مدت ۸ s را پیدا کنیم.

$$\frac{v_{avB}}{v_{avA}} = \frac{\Delta x_{2B}}{\Delta x_{2A}} = \frac{\Delta x_{1B} + \Delta x_{2B}}{\Delta x_{1A} + \Delta x_{2A}} = \frac{16 + 33.6}{3.2 + 22.4} = \frac{50}{25.6} = \frac{19}{8}$$

۴۹ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست:

مکان اولیه (m) شتاب $\left(\frac{m}{s^2}\right)$ مکان (m)

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

$$x = v_0 t + x_0$$

سرعت اولیه $\left(\frac{m}{s}\right)$ زمان (s) سرعت $\left(\frac{m}{s}\right)$

۲ معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت:

گام ۱ ابتدا معادله‌های مکان - زمان دو متحرک را می‌نویسیم.

متحرک A: متحرک A از مبدأ مکان $(x_A = 0 \text{ m})$ و از حال سکون $(v_A = 0 \text{ m/s})$ با شتاب ثابت $a_A = 2 \text{ m/s}^2$ شروع به حرکت کرده است:

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + v_{A0} t + x_{A0} \Rightarrow x_A = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2 + 0 \times t + 0 \Rightarrow x_A = t^2$$

گام ۲ دو مایع با هم مخلوط شده‌اند؛ پس چگالی مخلوط حاصل از این دو مایع را به دست می‌آوریم.

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

$$\xrightarrow{\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3, \rho_2 = 1/2 \text{ g/cm}^3} \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{1 \times 400 + 1/2 \times 600}{400 + 600} = 1/12 \text{ g/cm}^3$$

گام ۳ حالا این مخلوط داخل ظرف استوانه‌ای شکل با عمق ۵۰ cm ریخته شده است و طراح از ما فشار پیمانه‌ای در کف این ظرف را می‌خواهد.

$$P = \rho_{\text{مخلوط}} g h + P_0 \xrightarrow{P_0 = P_g} P_g = \rho_{\text{مخلوط}} g h$$

$$\xrightarrow{\rho_{\text{مخلوط}} = 1/12 \text{ g/cm}^3 = 112 \text{ kg/m}^3} P_g = 1120 \times 10 \times 0.5 = 5600 \text{ Pa} = 5/6 \text{ kPa}$$

مشاوره معمولاً هر سال حداقل یک سؤال با ایده تازه داریم و ایده این سؤال هم تازه بود. از این جور سؤال‌ها نترسید! سؤال را به خوبی تحلیل کنید و پایه‌های سؤال پیش بروید تا در نهایت به خواسته سؤال برسید.

۴۷ - گزینه ۱

درس‌نامه رابطه جابه‌جایی - زمان در حرکت سقوط آزاد:

شتاب گرانش $\left(\frac{m}{s^2}\right)$ جابه‌جایی در راستای قائم (m)

$$\Delta y = -\frac{1}{2} g t^2$$

علامت منفی در این رابطه برای این است که جهت مثبت را به طرف بالا در نظر می‌گیریم، ولی جهت شتاب گرانش به سمت پایین است.

گام ۱ زمان سقوط گلوله را از رابطه جابه‌جایی - زمان حساب می‌کنیم.

$$\Delta y = -\frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{\Delta y = -80 \text{ m}, g = 10 \text{ m/s}^2} -80 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

یعنی گلوله در لحظه $t = 4$ s به زمین برخورد می‌کند.

گام ۲ گلوله ۰/۶ s قبل از رسیدن به زمین به مدت $t' = (4 - 0.6) \text{ s}$ در راه بوده است؛ پس جابه‌جایی گلوله در مدت t' برابر می‌شود با:

$$\Delta y' = -\frac{1}{2} g t'^2 \xrightarrow{t' = 4 - 0.6 = 3.4 \text{ s}} \Delta y' = -\frac{1}{2} \times 10 \times (3.4)^2 = -57.8 \text{ m}$$

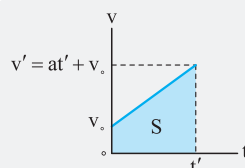
گام ۳ اگر سطح زمین را مبدأ مکان بگیریم، مکان اولیه گلوله $y_0 = 80 \text{ m}$ خواهد بود. در این صورت داریم:

$$\Delta y' = y' - y_0 \xrightarrow{\Delta y' = -57.8 \text{ m}, y_0 = 80 \text{ m}} -57.8 = y' - 80 \Rightarrow y' = 80 - 57.8 = 22.2 \text{ m}$$

۴۸ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ نمودار سرعت - زمان متحرکی

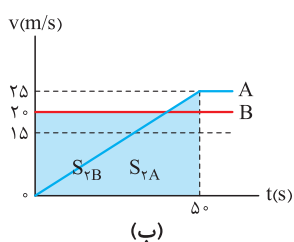
که با شتاب ثابت بر روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند، یک خط راست مانند شکل روبه‌رو است.



۲ در حرکت با شتاب ثابت a بر روی خط راست، اگر سرعت متحرک در بازه زمانی Δt از v_1 به v_2 برسد، می‌توانیم سرعت v_2 را از رابطه زیر حساب کنیم.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow v_2 = a \Delta t + v_1$$

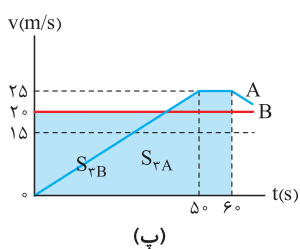
۳ مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t بیانگر اندازه جابه‌جایی متحرک است. مثلاً برای شکل بالا اندازه جابه‌جایی متحرک در بازه صفر تا t' برابر است با: $\Delta x = S$



پس در لحظه $t_1 = 40$ s متحرک B،
 $800 - 400 = 400$ m از متحرک A جلوتر
 است. تا این جا (۲) پُر!

شکل (ب) (بازه صفر تا ۵۰ s)

$$\begin{cases} \Delta x_{rA} = S_{rA} = \frac{25 \times 50}{2} = 625 \text{ m} \Rightarrow x_{rA} - x_{rA} = 625 \text{ m} \\ \xrightarrow{x_{rA} = 0 \text{ m}} x_{rA} = 625 \text{ m} \\ \Delta x_{rB} = S_{rB} = 20 \times 50 = 1000 \text{ m} \Rightarrow x_{rB} - x_{rB} = 1000 \text{ m} \\ \xrightarrow{x_{rB} = 0 \text{ m}} x_{rB} = 1000 \text{ m} \end{cases}$$



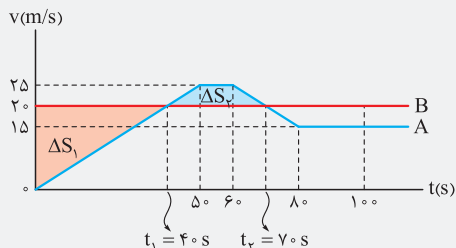
پس در لحظه $t_2 = 50$ s متحرک B،
 $1000 - 625 = 375$ m از متحرک A جلوتر
 است و (۴) هم پُر!

شکل (پ) (بازه صفر تا ۶۰ s)

$$\begin{cases} \Delta x_{rA} = S_{rA} = \text{مساحت دوزنقه} = \frac{60 + (60 - 50)}{2} \times 25 = 875 \text{ m} \\ \Rightarrow x_{rA} - x_{rA} = 875 \text{ m} \xrightarrow{x_{rA} = 0 \text{ m}} x_{rA} = 875 \text{ m} \\ \Delta x_{rB} = S_{rB} = 20 \times 60 = 1200 \text{ m} \Rightarrow x_{rB} - x_{rB} = 1200 \text{ m} \\ \xrightarrow{x_{rB} = 0 \text{ m}} x_{rB} = 1200 \text{ m} \end{cases}$$

یعنی در لحظه $t_3 = 60$ s متحرک B، $1200 - 875 = 325$ m از متحرک A جلوتر است
 و (۳) پُر پُر! بنابراین تنها گزینه ممکن، (۱) است که آن را انتخاب می‌کنیم.

تیزبازی به شکل زیر نگاه کنید. مساحت مثلث ΔS_1 ، مسافتی است که متحرک B همان ۴۰ ثانیه اول از متحرک A جلو می‌افتد.
 $\Delta S_1 = \frac{20 \times 40}{2} = 400$ m



پس تا لحظه $t_1 = 40$ s متحرک B، 400 m از متحرک A جلو می‌افتد و مساحت دوزنقه ΔS_2 ، نشان‌دهنده مقدار نزدیک شدن متحرک A به متحرک B است.

$$\Delta S_2 = \frac{(60 - 50) + (70 - 40)}{2} \times (25 - 20) = 100 \text{ m}$$

بنابراین متحرک A فقط می‌تواند 100 m از آن 400 متری که عقب افتاده را جبران کند و هرگز به متحرک B نمی‌رسد.

۵۱- گزینه ۳

درس نامه ۱ نیروی اصطکاک جنبشی:
 ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح
 $f_k = \mu_k F_N$
 نیروی عمودی سطح (N)

متحرک B، متحرک B با سرعت ثابت $v_B = 16$ m/s حرکت می‌کند و در لحظه $t = 3$ s از مبدأ مکان ($x_B = 0$ m) عبور می‌کند؛ پس اول باید مکان اولیه این متحرک را مشخص کنیم و بعد معادله مکان - زمانش را بنویسیم.

$$x_B = v_B t + x_{rB} \xrightarrow{v_B = 16 \text{ m/s}, x_{rB} = 0 \text{ m}} 0 = 16 \times 3 + x_{rB} \Rightarrow x_{rB} = -48 \text{ m}$$

$$x_B = v_B t + x_{rB} \Rightarrow x_B = 16t - 48$$

گام ۲ حالا ببینیم متحرک‌های A و B در لحظه‌های $t_1 = 7$ s و $t_2 = 9$ s کجای محور x هستند و در هر کدام از این لحظه‌ها فاصله‌شان از هم چه قدر است.

$$t_1 = 7 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} x_{rA} = 7^2 = 49 \text{ m} \\ x_{rB} = 16 \times 7 - 48 = 64 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow x_{rB} - x_{rA} = 64 - 49 = 15 \text{ m}$$

یعنی در لحظه $t_1 = 7$ s متحرک B، 15 m از متحرک A جلوتر است.

$$t_2 = 9 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} x_{rA} = 9^2 = 81 \text{ m} \\ x_{rB} = 16 \times 9 - 48 = 96 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow x_{rB} - x_{rA} = 96 - 81 = 15 \text{ m}$$

یعنی در لحظه $t_2 = 9$ s متحرک B، 15 m از متحرک A جلوتر است.

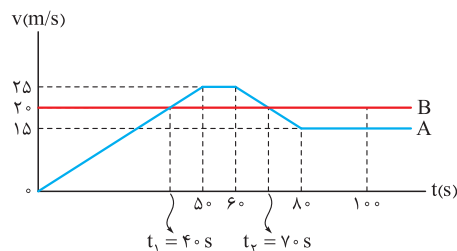
گام ۳ حالا یک لحظه بین 7 s و 9 s را هم امتحان می‌کنیم تا بفهمیم دو متحرک به هم نزدیک شده‌اند یا دور:

$$t' = 8 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} x_{rA} = 8^2 = 64 \text{ m} \\ x_{rB} = 16 \times 8 - 48 = 80 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow x_{rB} - x_{rA} = 80 - 64 = 16 \text{ m}$$

این‌جا مشخص شد که در لحظه $t' = 8$ s متحرک B، 16 m از متحرک A جلوتر است؛ بنابراین در بازه زمانی 7 s تا 9 s فاصله دو متحرک از هم ابتدا افزایش سپس کاهش یافته است.

۵۰- گزینه ۱

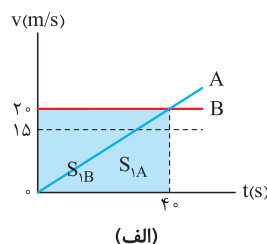
گام ۱ در شکل زیر ابتدا به کمک مفهوم شیب خط یا قضیه تالس t_1 و t_2 را پیدا می‌کنیم.



$$50 \text{ s} \Rightarrow \text{شیب خط نمودار A در بازه صفر تا } 50 \text{ s} = \frac{25}{50} = \frac{20}{t_1} \Rightarrow t_1 = 40 \text{ s}$$

$$80 \text{ s} \Rightarrow \text{شیب خط نمودار A در بازه } 60 \text{ s تا } 80 \text{ s} = \frac{15 - 25}{80 - 60} = \frac{20 - 25}{t_2 - 60} \Rightarrow t_2 = 70 \text{ s}$$

گام ۲ می‌دانیم مساحت محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان بیانگر اندازه جابه‌جایی متحرک است. با توجه به این که هر دو متحرک در مبدأ زمان از مبدأ محور عبور کرده‌اند ($x_{rA} = x_{rB} = 0$ m)، مکان هر کدام از متحرک‌ها را در لحظه‌های $t_1 = 40$ s و $t_2 = 50$ s و $t_3 = 60$ s به کمک مساحت زیر نمودار محاسبه می‌کنیم.



شکل (الف) (بازه صفر تا ۴۰ s)

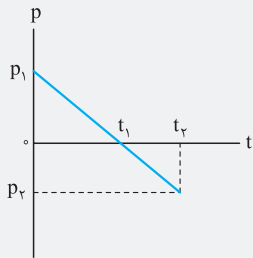
$$\begin{cases} \Delta x_{rA} = S_{rA} = \frac{20 \times 40}{2} = 400 \text{ m} \Rightarrow x_{rA} - x_{rA} = 400 \text{ m} \\ \xrightarrow{x_{rA} = 0 \text{ m}} x_{rA} = 400 \text{ m} \\ \Delta x_{rB} = S_{rB} = 20 \times 40 = 800 \text{ m} \Rightarrow x_{rB} - x_{rB} = 800 \text{ m} \\ \xrightarrow{x_{rB} = 0 \text{ m}} x_{rB} = 800 \text{ m} \end{cases}$$

۵۳- گزینه ۲

درس نامه ۱ نیروی خالص متوسط بر حسب تکانه:

جرم جسم (kg) تغییرات تکانه (kg.m/s) شتاب (m/s²) ← $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = ma$ ← نیروی خالص متوسط (N)

مدت زمان (s)



اگر متحرکی با شتاب ثابت بر روی مسیر مستقیم حرکت کند، نمودار تکانه - زمان آن به صورت یک خط راست (تابع درجه اول) است؛ مثل شکل مقابل:

نمودار تکانه - زمان متحرک به صورت یک خط راست (تابع درجه اول) است؛ بنابراین متحرک با شتاب ثابت حرکت می کند و در نتیجه شتاب آن در هر لحظه، برابر با شتاب متوسط آن در هر بازه زمانی است؛ پس به جای محاسبه شتاب متحرک در لحظه $t = 8$ s، می توانیم شتاب متوسط آن در بازه زمانی صفر تا 10 s را محاسبه کنیم.

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \xrightarrow{F_{av}=ma} ma = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow{m=0.2 \text{ kg}, \Delta p=p_2-p_1=7-1=6 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}, \Delta t=t_2-t_1=10-0=10 \text{ s}} \rightarrow \frac{6}{10} = a \Rightarrow a = 0.6 \text{ m/s}^2$$

۵۴- گزینه ۴

درس نامه بیشینه تندی خودرو هنگام پیچ به شرط آن که نلغزد: $v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}$

♦ برای تبدیل یکای km/h به m/s و برعکس به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{\text{km}}{\text{h}} \xrightarrow{\times \frac{10}{36}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} \xrightarrow{\times \frac{36}{10}} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

حداکثر تندی ای که خودرو می تواند روی پیچ هنگام دورزدن داشته باشد و نلغزد، هنگامی است که بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی، نیروی مرکزگرا را تأمین کند؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s rg} \xrightarrow{v_{max}=36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}, r=25 \text{ m}, g=10 \text{ m/s}^2} \rightarrow 10 = \sqrt{\mu_s \times 25 \times 10}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 100 = 250 \mu_s \Rightarrow \mu_s = 0.4$$

۵۵- گزینه ۳

درس نامه ۱ دوره تناوب نوسانگر: مدت زمان انجام یک نوسان کامل.

زمان $T \rightarrow (s)$ ← دوره تناوب (s) تعداد نوسان $\rightarrow$

در حرکت هماهنگ ساده، حداقل مدت زمانی که طول می کشد تا نوسانگر از نقطه تعادل (مرکز نوسان) به مکان $x = \frac{A}{2}$ برسد، $\frac{T}{12}$ است.

با توجه به شکل زیر، دوره تناوب نوسانگر را به دست می آوریم.

$$\Delta t = \frac{T}{12} \xrightarrow{\Delta t = \frac{1}{6} \text{ s}} \rightarrow \frac{1}{6} = \frac{T}{12} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \text{ s}$$

اندازه نیرویی که سطح به جسم وارد می کند (R)، برابر با برابند دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک (f) است.

$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

در رابطه بالا، f می تواند f_s ، $f_{s,max}$ یا f_k باشد.

جسم در حال حرکت است، پس نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع نیروی اصطکاک جنبشی است؛ بنابراین نیرویی که در ضمن حرکت، جسم به دیوار وارد می کند ($\vec{R}$) برابر دو نیروی عمودی سطح ($\vec{F}_N$) و نیروی اصطکاک جنبشی ($\vec{f}_k$) است و می توانیم بنویسیم: (هواستون باشد که طبق قانون سوم نیوتون، نیرویی که جسم به دیوار وارد می کند، هم اندازه و در خلاف جهت نیرویی هست که دیوار به جسم وارد می کند).

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow{F_N = F = 40 \text{ N}, f_k = \mu_k F_N = \mu_k F = 0.4 \times 40 = 16 \text{ N}} \rightarrow R = \sqrt{40^2 + 16^2}$$

$$= \sqrt{(8 \times 5)^2 + (8 \times 2)^2} = \sqrt{8^2 \times (25 + 4)} = 8\sqrt{29} \text{ N}$$

۵۲- گزینه ۲

درس نامه بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی:

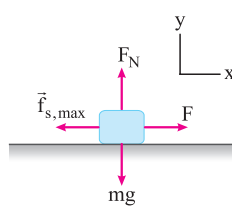
ضرب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

نیروی عمودی سطح (N) بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی

در رابطه بالا، اگر $F_{محری} \leq f_{s,max}$ باشد، جسم ساکن می ماند و نیروی اصطکاک برابر با $F_{محری}$ است.

جسمی را که بر روی سطح افقی در حال سکون قرار دارد، در نظر بگیرید. اگر نیروی افقی F بر این جسم وارد شود و جسم حرکت نکند، نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع نیروی اصطکاک ایستایی (f_s) است. حالا اگر نیروی F را افزایش بدهیم، نیروی اصطکاک ایستایی هم افزایش می یابد تا به بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی ($f_{s,max}$) برسد. در این لحظه، جسم در آستانه حرکت قرار می گیرد و پس از آن با افزایش نیروی F ، جسم حرکت کرده و نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) می شود؛



بنابراین منظور سؤال از «حداقل نیرویی که در راستای افقی به جسم وارد می شود تا جسم به حرکت درآید»، بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی ($f_{s,max}$) است. با توجه به شکل مقابل، بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی ($f_{s,max}$) را محاسبه می کنیم.

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg$$

$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F - f_{s,max} = 0 \Rightarrow F = f_{s,max}$$

$$\xrightarrow{f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s mg} \rightarrow F = 0.5 \times 5 \times 10 = 25 \text{ N}$$

$$\mu_s = 0.5, m = 5 \text{ kg}, g = 10 \text{ m/s}^2$$

۱ و ۴ پُر!

در قسمت دوم سؤال، جسم در حال حرکت است؛ پس نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) است؛ اگر جسمی را روی جسم 5 کیلوگرمی قرار بدهیم، نیروی عمودی سطح (F_N) افزایش می یابد و در نتیجه نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) نیز افزایش می یابد. در این صورت، حالت های زیر ممکن است پیش بیاید:

(۱) اگر $F_{محری} < f_k$ شود، جسم به صورت تندشونده حرکت می کند و نمی ایستد.

(۲) اگر $F_{محری} = f_k$ شود، نیروی خالص وارد بر جسم صفر است (شتابش صفر) و جسم با سرعت ثابت حرکت می کند.

(۳) اگر $F_{محری} > f_k$ شود، نیروی خالص وارد بر جسم در خلاف جهت حرکت آن است و جسم به صورت کندشونده حرکت می کند و بعد از مدتی می ایستد.

سؤال حداکثر جرمی را می خواهد که می توانیم روی جسم قرار بدهیم تا متوقف نشود؛ یعنی حالت (۲).

$$f_k = F \xrightarrow{f_k = \mu_k F_N = \mu_k (m + 5)g} F = \mu_k (m + 5)g$$

$$\xrightarrow{F = 25 \text{ N}, \mu_k = 0.4, g = 10 \text{ m/s}^2} 25 = 0.4 \times (m + 5) \times 10 \Rightarrow m = 6/25 - 5 = 1/25 \text{ kg}$$

درس نامه ۱ تندی انتشار موج در طناب یا تار تحت کشش:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \rightarrow (N) \leftarrow \text{نیروی کشش طناب یا تار} \rightarrow (kg/m) \leftarrow \text{چگالی خطی جرم}$$

۲ بسامد تشدیدي هماهنگ اول (بسامد صوت اصلی) در تار مرتعش دو انتها بسته:

$$f = \frac{v}{\lambda} \rightarrow (m/s) \text{ تندی انتشار موج}$$

$$\lambda = 2L \rightarrow (m) \text{ طول تار}$$

نسبت بسامد صوت اصلی در حالت دوم به حالت اول را داریم؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{v_1}{v_2} \rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{v_1}{v_2} \rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

حالا می توانیم نیروی کشش تار در حالت دوم را به دست بیاوریم.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \rightarrow \frac{36}{25} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \Rightarrow F_2 = 72 N$$

بنابراین نیروی کشش تار را باید $22 N$ ($F_2 - F_1 = 72 - 50$) افزایش دهیم.

گزینه ۲ - ۶۰

برای تشکیل طیف گسلی خطی اتم های هر گاز نظیر هیدروژن، هلیوم، سدیم و نئون معمولاً از یک لامپ باریک و بلند شیشه ای که حاوی مقداری گاز رقیق و کم فشار است، استفاده می شود. دو الکترود به نام های آند و کاتد در دو طرف این لامپ قرار دارد که به ترتیب به پایانه های مثبت و منفی یک منبع تغذیه با ولتاژ بالا وصل اند. این ولتاژ بالا، سبب تخلیه الکتریکی در گاز می شود و اتم های گاز درون لامپ شروع به گسیل نور می کنند. آزمایش نشان می دهد که طیف خطی ایجاد شده و هم چنین رنگ نور گسیل شده، به نوع گاز درون لامپ بستگی دارد.

مشاوره این سؤال از متن کتاب درسی طراحی شده است. اگر کتاب درسی را خوانده اید، فرصت را از دست ندهید تا بعداً حسرت نخورید.

گزینه ۴ - ۶۱

درس نامه ۱ حداقل کار لازم برای خارج کردن الکترون ها از سطح یک فلز خاص را تابع کار فلز می گوئیم و رابطه آن به صورت زیر است.

$$W_0 = h f_0$$

ثابت پلانک (J.s) $\uparrow$
 بسامد آستانه (Hz) $\downarrow$
 تابع کار فلز (J)

۲ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون ها در اثر فوتوالکتریک:

$$K_{max} = h f - W_0$$

بسامد فوتون (Hz) $\uparrow$
 تابع کار فلز (J) $\downarrow$
 ثابت پلانک (J.s)

$$eV \xrightarrow{\frac{1}{1.6 \times 10^{-19}}} J \xrightarrow{\frac{1}{1.6 \times 10^{-19}}} eV$$

کافی است داده ها را در رابطه زیر جای گذاری کنیم تا بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون ها پس از جدا شدن از فلز را به دست بیاوریم.

$$K_{max} = h f - W_0 \xrightarrow{f = \Delta f} K_{max} = \Delta h f - W_0$$

$$\xrightarrow{W_0 = h f_0} K_{max} = \Delta W_0 - W_0 = 4 W_0$$

$$\xrightarrow{W_0 = 1.75 eV} K_{max} = 4 \times 1.75 = 7 eV$$

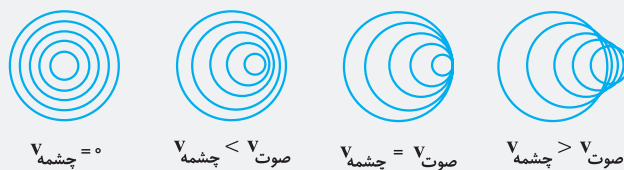
$$\xrightarrow{\text{تبدیل } eV \text{ به } J} K_{max} = 7 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.12 \times 10^{-18} J$$

گام ۱ حالا با جای گذاری داده ها در رابطه زیر، تعداد نوسان های نوسانگر در هر دقیقه (۶۰ ثانیه) را محاسبه می کنیم.

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow{\frac{T = \frac{1}{\Delta}}}{t = 60 s} \rightarrow \frac{1}{\Delta} = \frac{60}{n} \Rightarrow n = 300$$

گزینه ۱ - ۵۶

درس نامه شکل های زیر، جبهه های موج حاصل از چشمه های صوت را نشان می دهد. در این شکل ها، چشمه v تندی چشمه و صوت v تندی صوت است.



چشمه (۱) با تندی کمتر از تندی صوت ($v_1 < v$) و چشمه (۲) با تندی بیشتر از تندی صوت ($v_2 > v$) در حال حرکت و چشمه (۳) ساکن ($v_3 = 0$) است.

گزینه ۴ - ۵۷

شفاف سازی دوره تناوب سامانه جرم - فنر ۴۰ درصد کاهش می یابد، یعنی:

$$T_2 = T_1 - \frac{40}{100} T_1 = \frac{6}{10} T_1$$

درس نامه دوره تناوب سامانه جرم - فنر:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow (kg) \text{ جرم}$$

$$\rightarrow (N/m) \text{ ثابت فنر}$$

نسبت دوره تناوب سامانه جرم - فنر در حالت دوم به حالت اول را داریم؛ بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \xrightarrow{\frac{T_1}{T_2} = \frac{6}{10}} \frac{6}{10} = \sqrt{\frac{m_1 - 32}{m_1}}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{36}{100} = \frac{m_1 - 32}{m_1} \Rightarrow 9m_1 = 25m_1 - 25 \times 32$$

$$\Rightarrow 16m_1 = 25 \times 32 \Rightarrow m_1 = 500 g$$

گزینه ۲ - ۵۸

درس نامه وقتی یک پرتو نور از محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگری می شود، بخشی از نور باز می تابد و بخشی دیگر وارد محیط دوم می شود. ضریب شکست هر محیط به صورت مقابل تعریف می شود.

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow (m/s) \text{ تندی نور در خلأ}$$

$$v \rightarrow (m/s) \text{ تندی نور در محیط}$$

پرتو نور از شیشه وارد مایع شده است و سؤال از ما نسبت تندی انتشار نور در مایع به تندی انتشار نور در شیشه را می خواهد.

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{n_{\text{شیشه}}}{n_{\text{مایع}}} = \frac{v_{\text{مایع}}}{v_{\text{شیشه}}} \xrightarrow{\frac{n_{\text{شیشه}}}{n_{\text{مایع}}} = \frac{3}{4}} \frac{v_{\text{مایع}}}{v_{\text{شیشه}}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{v_{\text{مایع}}}{v_{\text{شیشه}}} = \frac{4}{3}$$

تله اگر نسبت $\frac{v_{\text{شیشه}}}{v_{\text{مایع}}}$ را به دست بیاورید، به گزینه نادرست ۱ می رسید.

گزینه ۳ - ۵۹

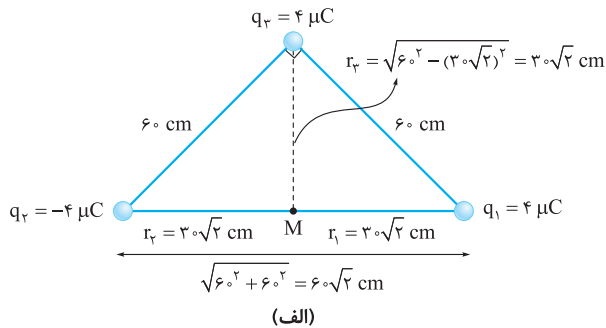
شفاف سازی بسامد صوت اصلی ۲۰ درصد افزایش یابد، یعنی:

$$f_1' = f_1 + \frac{20}{100} f_1 = \frac{6}{5} f_1$$

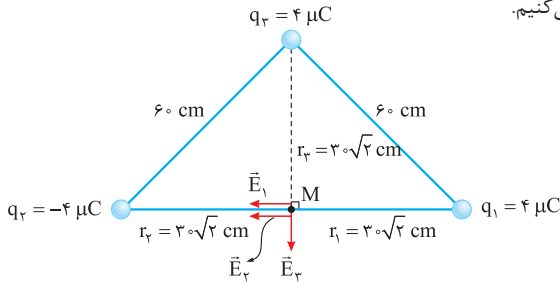
۶۴- گزینه ۱

استراتژی میدان‌های الکتریکی مربوط به هر یک از بارهای q_1, q_2, q_3 و در نقطه M را مشخص کنید، سپس میدان الکتریکی خالص آن‌ها را به دست بیاورید.

گام ۱ ابتدا فاصله بارهای الکتریکی q_1, q_2, q_3 از نقطه M را پیدا می‌کنیم (شکل (الف)).



گام ۲ با توجه به این که میدان الکتریکی از بار مثبت رو به خارج و به سوی بار منفی است، اندازه و جهت هر یک از میدان‌های الکتریکی حاصل از بارهای q_1, q_2, q_3 در نقطه M را تعیین می‌کنیم.



$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{4 \times 10^{-6}}{(30\sqrt{2} \times 10^{-2})^2}$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{9 \times 4 \times 10^3}{9 \times 10^2 \times 2 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$\left. \begin{aligned} |q_1| &= |q_2| = |q_3| = 4 \mu\text{C} \\ r_1 &= r_2 = r_3 = 30\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_1 = E_2 = E_3 = 2 \times 10^5 \text{ N/C}$$

گام ۳ حالا با توجه به جهت‌های E_1, E_2 و E_3 ، میدان الکتریکی خالص در نقطه M را محاسبه می‌کنیم.

$$E_{1,2} = E_1 + E_2 \xrightarrow{E_1=E_2} E_{1,2} = 2E_1$$

$$E_M = \sqrt{(E_{1,2})^2 + E_3^2} = \sqrt{(2E_1)^2 + E_1^2} = \sqrt{4E_1^2 + E_1^2} = \sqrt{5E_1^2} = E_1\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{E_1=2 \times 10^5 \text{ N/C}} E_M = 2\sqrt{5} \times 10^5 \text{ N/C}$$

۶۵- گزینه ۲

درس نامه ۱ اصل کوانتیده‌بودن بار الکتریکی:

تعداد الکترون‌ها $q = ne$, $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$

بار الکتریکی (C)

۲ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی:

تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی (J) $\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \rightarrow (V)$ بار الکتریکی (C)

هر کیلووات‌ساعت (1 kW.h)، معادل $3/6 \times 10^6 \text{ J}$ انرژی است.

$$1 \text{ kW.h} = 3/6 \times 10^6 \text{ J}$$

دو رابطه $\Delta U = q\Delta V$ و $q = ne$ را با هم ترکیب می‌کنیم و تعداد الکترون‌های شارش یافته بین این دو نقطه (n) را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= q\Delta V \\ q &= ne \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta U = ne\Delta V \Rightarrow n = \frac{\Delta U}{e\Delta V}$$

۶۲- گزینه ۱

عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

(الف) و (ب) در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا، تعداد نوکلئون‌ها در طی فرایند واپاشی هسته‌ای پایسته است؛ یعنی تعداد نوکلئون‌ها قبل از فرایند با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند یکسان است. $\times$

همین الان گزینه درست معلوم شد!

(پ) اختلاف بین ترازهای انرژی نوکلئون‌ها در هسته از مرتبه keV تا مرتبه MeV است، در حالی که اختلاف بین ترازهای انرژی الکترون‌ها در اتم از مرتبه eV است؛ پس اختلاف بین ترازهای انرژی نوکلئون‌ها در هسته در مقایسه با اختلاف ترازهای انرژی الکترون‌ها در اتم، خیلی زیاد است.

مشاوره در سؤالات به اصطلاح چندموردی (الف، ب و ...،) گزینه‌های نادرست را با توجه به عبارت‌ها حذف کنید تا زودتر به پاسخ برسید.

۶۳- گزینه ۴

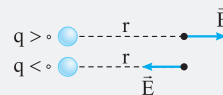
درس نامه ۱ اندازه میدان الکتریکی حاصل از یک ذره باردار q در فاصله r از آن:

بار الکتریکی (C) $E = k \frac{|q|}{r^2} \rightarrow$ اندازه میدان الکتریکی (N/C)

فاصله $r \rightarrow (m)$

ثابت کولن $(\frac{N.m^2}{C^2})$

۲ جهت میدان الکتریکی، از بارهای مثبت رو به خارج و به سوی بارهای منفی است.



گام ۱ اندازه هر یک از میدان‌های الکتریکی E_1 و E_2 که به ترتیب ناشی از بارهای الکتریکی q_1 و q_2 هستند، در حالت اول و در نقطه A نسبت به هم به دست می‌آوریم.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{|q_2|}{|q_1|} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$\xrightarrow{q_2=20 \mu\text{C}, r_1=20 \text{ cm}; q_1=10 \mu\text{C}, r_2=40 \text{ cm}} \frac{E_2}{E_1} = \frac{20}{10} \times \left(\frac{20}{40}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} E_1$$

گام ۲ با توجه به این که E_1 و E_2 در نقطه A بر هم عمودند (شکل (الف))، اندازه میدان الکتریکی خالص آن دو را به دست می‌آوریم.

$$E_A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{E_1^2 + \left(\frac{E_1}{2}\right)^2} = \sqrt{E_1^2 + \frac{1}{4}E_1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}E_1^2} = \frac{E_1}{2}\sqrt{5}$$

گام ۳ اندازه میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در نقطه A در حالت دوم (E'_2) را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{E'_2}{E_2} = \left(\frac{r_2}{r'_2}\right)^2 \xrightarrow{r_2=40 \text{ cm}; r'_2=20 \text{ cm}} \frac{E'_2}{E_2} = \left(\frac{40}{20}\right)^2 = 4 \Rightarrow E'_2 = 4E_2$$

$$\xrightarrow{E_2=\frac{1}{2}E_1} E'_2 = 4 \times \frac{1}{2}E_1 = 2E_1$$

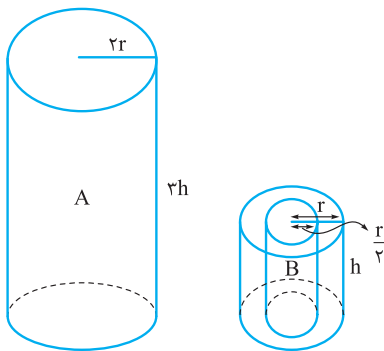
گام ۴ اندازه میدان الکتریکی خالص ناشی از دو بار q_1 و q_2 در نقطه A در حالت دوم (شکل (ب)) را محاسبه می‌کنیم.

$$E'_A = \sqrt{E_1^2 + E'_2^2} = \sqrt{E_1^2 + (2E_1)^2} = \sqrt{E_1^2 + 4E_1^2} = \sqrt{5E_1^2} = E_1\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow E'_A = \sqrt{5E_1^2} = E_1\sqrt{5}$$

گام ۵ حالا می‌توانیم نسبت بزرگی میدان الکتریکی خالص در نقطه A در حالت دوم به حالت اول را پیدا کنیم.

$$\frac{E'_A}{E_A} = \frac{\frac{E_1}{2}\sqrt{5}}{\frac{E_1}{2}\sqrt{5}} = 2$$



$$V_A = A_A h_A = \pi r_A^2 h_A \xrightarrow{r_A = 2r, h_A = h} V_A = \pi (2r)^2 (h) = 4\pi r^2 h$$

$$V_B = A_B h_B = \pi r_B^2 h_B - \pi r_{B, \text{داخلی}}^2 h_B$$

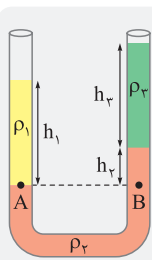
$$\xrightarrow{r_{B, \text{داخلی}} = r, h_B = h} V_B = \pi r^2 h - \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 h = \frac{3}{4} \pi r^2 h$$

گام ۳: حالا خواسته سؤال، یعنی نسبت $\frac{\rho_A}{\rho_B}$ را به دست می آوریم.

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A}$$

$$\xrightarrow{m_A = 2m_B, V_A = 4\pi r^2 h, V_B = \frac{3}{4}\pi r^2 h} \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{2m_B}{m_B} \times \frac{\frac{3}{4}\pi r^2 h}{4\pi r^2 h} = \frac{3}{16}$$

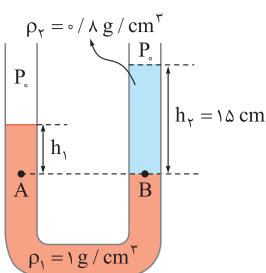
۷۲- گزینه ۳



درس نامه اگر چند مایع مخلوط نشدنی در یک لوله U شکل قرار داشته باشند و از هر دو طرف با هوای آزاد در ارتباط باشند، طبق اصل هم فشاری در نقاط هم تراز در یک مایع، رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} P_A &= P_B \\ \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 &= P_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_2 g h_2 \\ \Rightarrow \rho_1 g h_1 &= \rho_2 g h_2 + \rho_2 g h_2 \\ \Rightarrow \rho_1 h_1 &= \rho_2 h_2 + \rho_2 h_2 \end{aligned}$$

در این رابطه، مهم این است که یکاهای چگالی ها یکسان و یکاهای ارتفاع ها یکسان باشند. مثلاً ممکن است چگالی ها را بر حسب kg/m^3 قرار بدهیم، در حالی که ارتفاع ها بر حسب cm باشند.



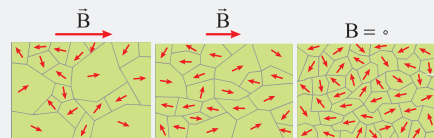
اگر شیر رابط را باز کنیم، چون چگالی مایع (۱) بیشتر از چگالی مایع (۲) است ($\rho_1 > \rho_2$)، مایع (۱) در شاخه سمت چپ پایین می آید و همان مقدار در شاخه سمت راست بالا می رود و به صورت شکل مقابل می شود.

$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 g h_1 + P_0 = \rho_2 g h_2 + P_0 \Rightarrow \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

$$\xrightarrow{\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3, \rho_2 = 0.8 \text{ g/cm}^3, h_2 = 15 \text{ cm}} 1 \times h_1 = 0.8 \times 15 \Rightarrow h_1 = 12 \text{ cm}$$

بنابراین اختلاف ارتفاع سطح آزاد در دو طرف لوله ۳ cm (۱۵ - ۱۲) است.

مشاوره از ظاهر سؤال نترسید! فقط نحوه پرسش این سؤال کمی متفاوت است و گر نه همان طور که دیدید، برای حل این سؤال از روش عجیب و غریبی استفاده نکردیم.



ابعاد حوزه ها از مرتبه دهم تا هزارم میلی متر است.

الف	ب	پ
ماده فرومغناطیسی در نبود میدان مغناطیسی خارجی	ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی ضعیف	ماده فرومغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی خارجی قوی

با افزایش اندازه میدان مغناطیسی، حجم حوزه هایی که دوقطبی مغناطیسی آن ها نسبت به میدان همسو هستند، زیاد می شود.

مواد پارامغناطیسی: اتم های این مواد، خاصیت مغناطیسی دارند اما دوقطبی مغناطیسی وابسته به آن ها، به طور کاتوره ای سمت گیری کرده اند (موزة مغناطیس ندارند). شکل (ت)، سمت گیری کاتوره ای دوقطبی های مغناطیسی در یک ماده پارامغناطیسی در نبود میدان مغناطیسی را نشان می دهد.

شکل نشان داده شده، دوقطبی های مغناطیسی را نشان می دهد که در حوزه های مغناطیسی هم جهت هستند؛ پس این دوقطبی های مغناطیسی مربوط به ماده فرومغناطیسی است (۲) و (۳) و با توجه به اینکه حجم بعضی از حوزه های مغناطیسی زیاد است، پس این ماده در حضور میدان مغناطیسی خارجی ضعیف قرار دارد.

۷۰- گزینه ۳

درس نامه جریان القایی متوسط در پیچه یا سیملوله یا مداری که شار مغناطیسی در آن تغییر می کند:

$$I_{av} = - \frac{N}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

جریان القایی متوسط مدار در بازه های زمانی داده شده را محاسبه می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} t_1 \text{ تا } t_2: I_{av,1} &= - \frac{N(\Phi_2 - \Phi_1)}{R \Delta t_1} = - \frac{N \Phi_0}{2R \Delta t_1} \\ \frac{3}{2} t_2 \text{ تا } t_1: I_{av,2} &= - \frac{N(\Phi_1 - \Phi_2)}{R(\Delta t_1 / \Delta t_2)} = 0 \\ 2t_1 \text{ تا } \frac{3}{2} t_2: I_{av,3} &= - \frac{N(\Phi_2 - \Phi_1)}{R(\Delta t_1 / \Delta t_2)} = - \frac{N \Phi_0}{R \Delta t_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_{av,3} = 2I_{av,1}$$

همان طور که می بینید، جریان القایی متوسط مدار در بازه زمانی $\frac{3}{2} t_2$ تا $2t_1$ ، دو برابر جریان القایی متوسط مدار در بازه زمانی صفر تا t_1 است؛ یعنی (۴) درسته! دقت کنید که جریان القایی متوسط در پیچه، سیملوله یا مداری که شار مغناطیسی در آن تغییر می کند، متناسب با شیب نمودار $\Phi - t$ است و چون شیب نمودار $\Phi - t$ در طی بازه های زمانی داده شده تغییر نمی کند، پس جریان القایی متوسط در بازه زمانی مربوطه، مقداری ثابت است.

۷۱- گزینه ۲

درس نامه چگالی: نسبت جرم به حجم ماده همگن.

$$\rho = \frac{\text{جرم (kg)}}{\text{حجم (m}^3\text{)}} \rightarrow \rho = \frac{\text{چگالی (kg/m}^3\text{)}}{\text{حجم}}$$

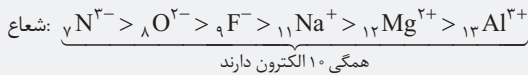
$$\text{ارتفاع} \uparrow \downarrow \text{مساحت مقطع} \leftarrow V = Ah$$

حجم استوانه:

گام ۱: ابتدا تکلیف حجم استوانه های A و B را مشخص می کنیم.

(ت)

★ **نکته ۱** در یون‌های هم‌الکترون، هر چه عدد اتمی بیشتر باشد، شعاع یون کوچک‌تر است.



۲ تفاوت شعاع آنیون‌های یک دوره، خیلی ناچیز بوده و کم‌تر از تفاوت شعاع کاتیون‌های آن دوره است. به طور مثال، در دوره سوم، تفاوت شعاع S^{2-} و Cl^- تنها ۳ pm (۱۸۴-۱۸۱) است، در حالی که تفاوت شعاع Na^+ و Mg^{2+} ۳۰ pm (۱۰۲-۷۲) می‌باشد.

یون‌های پایدار نافلزات دوره دوم F^- ، O^{2-} ، N^{3-} هستند. در آنیون‌های یک دوره از چپ به راست، شعاع و مقدار بار یون کاهش می‌یابد. کاهش مقدار بار الکتریکی باعث کاهش چگالی بار آنیون می‌شود، در حالی که کاهش شعاع، باعث افزایش چگالی بار (بار یون $\propto$ چگالی بار) می‌شود ولی از آن‌جا که تفاوت شعاع آنیون‌های یک دوره خیلی کم است، در این‌جا تأثیر مقدار بار از تأثیر شعاع بیشتر است؛ یعنی:

$\downarrow$ با کاهش مقدار بار آنیون در یک دوره
شعاع آنیون $\propto$ چگالی بار آنیون $\downarrow$ از چپ به راست، شعاع آنیون
خوبی تغییر (روند کاهش) نمی‌کند.

در آنیون‌های یک دوره، هر چه مقدار بار آنیون کمتر باشد، چگالی بار کم‌تر است.

بنابراین: $\text{F}^- > \text{O}^{2-} > \text{N}^{3-}$: مقایسه چگالی بار آنیون‌های پایدار نافلزات دوره دوم

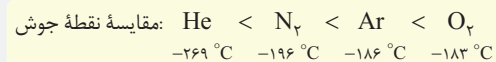
🔗 **تیزبازی** در این سؤال مثل خیلی از سؤال‌های موردی «الف»، «ب» و ... با بررسی عبارت «الف» و «ب» به پاسخ درست می‌رسیدین و نیازی به بررسی دو عبارت چالشی بعدی نبود.

۷۹- گزینه ۴

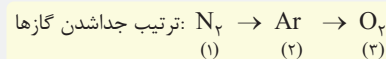
📖 **درس‌نامه** ترتیب جداسدن گازها از هوای مایع

اگر مقایسه نقطه جوش دو ماده گازی A و B به صورت $A > B$ باشد، هنگام مایع کردن این دو گاز، ابتدا A که نقطه جوش بالاتری دارد، مایع می‌شود، ولی اگر بخواهیم A و B مایع را به گاز تبدیل کنیم، ابتدا B که نقطه جوش پایین‌تری دارد، به گاز تبدیل می‌شود.

♦ ترتیب نقطه جوش چهار گاز هوا که شما باید به‌یاد بیاورید به صورت زیر است:



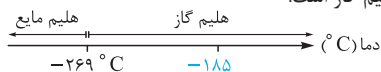
اگر نمونه‌ای از هوای مایع با دمای 200°C را وارد برج تقطیر کنیم، ترتیب جداسدن گازها این‌طور است:



دقت کنید که دمای 200°C بالاتر از نقطه جوش هلیوم (-269°C) می‌باشد؛ بنابراین در هوای مایع با دمای 200°C ، خبری از هلیوم نیست! (هر ماده‌ای بالاتر از نقطه جوش خود به حالت گاز است؛ پس هلیوم در دمای 200°C هم‌چنان به حالت گاز باقی می‌ماند.)

نقطه جوش اکسیژن 183°C ، آرگون 186°C و نیتروژن 196°C است؛ بنابراین تفاوت نقطه جوش اکسیژن و آرگون (3°C) از نیتروژن و آرگون (10°C) کم‌تر است.

🔗 **بررسی سایر گزینه‌ها:** ۱ نقطه جوش هلیوم 269°C است؛ دمای 185°C ، بالاتر از نقطه جوش هلیوم بوده و در این دما، هلیوم گاز است.



در این دما، هلیوم گاز است. نقطه جوش He

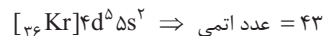
۲ نقطه جوش گاز آرگون (186°C) کم‌تر از گاز اکسیژن (183°C) است، بنابراین با گرم کردن هوای مایع، ابتدا Ar که نقطه جوش پایین‌تری دارد، به گاز تبدیل می‌شود.

۳ $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ و $\text{CO}_2(\text{g})$ در فرایند کاهش دما برای تهیه هوای مایع با رسیدن به نقطه انجماد و تصعیدشون از مخلوط گازی جدا و به حالت جامد تبدیل می‌شوند. ابتدا با کاهش دما تا 0°C (نقطه انجماد آب یا ذوب یخ)، رطوبت (H_2O) هوا به صورت یخ جدا می‌شود، سپس در دمای 78°C (نقطه چگالش یا تصعید CO_2)، گاز کربن دی‌اکسید به حالت جامد درآمده و از مخلوط گازی جدا می‌شود.

۴ دیدیم که فلز A می‌تواند جزء فلزهای دسته S یا d جدول باشد؛ بنابراین یون پایدار آن و میزان بار آن به نوع عنصر بستگی دارد. برای مثال اگر Sc^{3+} را در نظر بگیریم، یون پایدار آن ($3+$) است و اگر Ca^{2+} را در نظر بگیریم، یون پایدار آن ($2+$) است یا Fe^{2+} ، هر دو یون پایدار ($2+$) و ($3+$) را دارد.

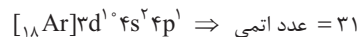
۷۷- گزینه ۳

در پانزدهمین عنصر دسته d، زیرلایه $3d$ کاملاً پر ($3d^{10}$) و زیرلایه $4d$ نیمه‌پر ($4d^5$) می‌باشد؛ بنابراین آرایش الکترونی این عنصر به صورت زیر است:



★ **نکته** بچه‌ها حواستون باشه که در این عنصر، آرایش الکترون‌های ظرفیتی را به اشتباه $4d^5 5s^1$ ننویسید. عنصری با آرایش الکترونی $[Kr] 4d^5 5s^1$ ، ۱۴مین عنصر از عناصر واسطه است نه ۱۵مین!

سیزدهمین عنصر دسته p در جدول تناوبی، عنصری است که زیرلایه‌های $3p$ و $4p$ آن کاملاً پر بوده و زیرلایه $4p$ آن یک الکترون دارد ($4p^1$ ، $4p^6$ ، $4p^5$)؛ بنابراین آرایش الکترونی این عنصر به صورت زیر است:



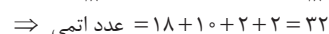
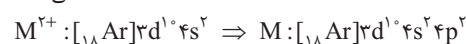
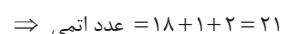
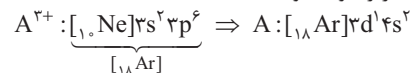
اختلاف عدد اتمی این دو عنصر برابر $43 - 31 = 12$ است که این عدد، عدد اتمی دومین فلز قلیایی خاکی در گروه ۲ (Mg) است و نه دومین فلز قلیایی (Na)!

🔗 **تله** اگر حواستون نباشه و عنصر با آرایش الکترونی $[Kr] 4d^5 5s^1$ (۱۴مین عنصر دسته d) را به عنوان ۱۵مین عنصر دسته d در نظر بگیرید، اختلاف عدد اتمی این عنصر با سیزدهمین عنصر دسته p، برابر $42 - 31 = 11$ می‌شه که برابر عدد اتمی دومین فلز قلیایی (Na) است و این عبارت رو به اشتباه درست می‌گیرید.

🔗 **بررسی سایر گزینه‌ها:** ۱ در دوره سوم ۳ عنصر فلزی Na ، Mg ، Al و یک شبه‌فلز Si (با رسانایی الکتریکی کم‌تر)، رسانای جریان الکتریکی هستند.

۲ در عناصر واسطه دوره چهارم، از میان ۱۰ عنصر، آرایش الکترونی ۲ عنصر Cr و Cu به $4s^1$ و بقیه آنها به $4s^2$ ختم می‌شود که تعداد آن‌ها برابر ۸ خواهد بود.

۴ اگر آرایش الکترونی یون A^{3+} ، M^{2+} به $4s^2$ و $4p^6$ و $4s^2$ ختم شده باشد، آرایش الکترونی و عدد اتمی دو عنصر A و M به صورت زیر خواهد بود:



اختلاف عدد اتمی این دو عنصر برابر ۱۱ است که مربوط به عدد اتمی سدیم (Na) با رنگ شعله زردرنگ است.

🔗 **مشاوره** در ۴ این سؤال، آرایش الکترونی یون M^{2+} به $4s^2$ ختم شده؛ یعنی آرایش الکترونی لایه ظرفیت عنصر M به صورت $4s^2 4p^2$ بوده و این عنصر شبه‌فلز Ge است. می‌دانیم که شبه‌فلزها یون پایدار تشکیل نمی‌دهند و احتمالاً توجه طراح محترم برای این مورد، فرض تشکیل یون ناپایدار بوده! پی بگیریم؟!

۷۸- گزینه ۴

عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

🔗 **بررسی عبارت‌ها:** (الف) در انتهای هر دوره جدول تناوبی، گازهای نجیب حضور دارند ولی گاز نجیب هلیوم در دوره اول به آرایش هشت‌تایی نمی‌رسد.

(ب) با توجه به این‌که اغلب عناصر دارای ایزوتوپ هستند، در جدول تناوبی، برای هر عنصر، جرم اتمی میانگین قرار داده می‌شود نه عدد جرمی! (تذکر: برای ^{99}Tc که عنصری ساختگی است، در جدول تناوبی جرم اتمی میانگین نوشته نشده است.)

(پ) در دوره چهارم جدول تناوبی، ۶ عنصر مربوط به دسته p و ۲ عنصر Zn و Cu از دسته d، به ترتیب با آرایش‌های الکترون‌های ظرفیتی $3d^1 4s^2$ و $3d^1 4s^1$ ، دارای زیرلایه $3d$ پر و ۱۰ الکترونی هستند.

۸۰- گزینه ۲

گام ۱: ابتدا باید ببینیم که به ازای سوختن کامل هر مول از این مواد، چند مول CO_2 حاصل می‌شود.

نکته: در واکنش سوختن کامل ترکیب‌های آلی، تمام اتم‌های کربن موجود در ترکیب CO_2 تبدیل می‌شود، بنابراین برای سرعت عمل بیشتر، نیازی به نوشتن کامل معادله موازنه‌شده سوختن نیست، کافایت ضریب ترکیب را ۱ و ضریب CO_2 را برابر با تعداد اتم‌های کربن ترکیب در نظر بگیریم:

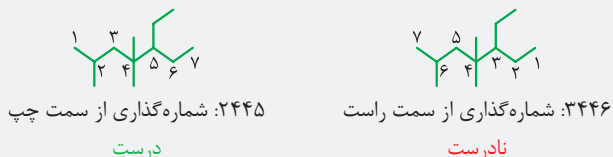
با توجه به نکته بالا داریم:
 $CH_4 \sim 1CO_2, CH_3OH \sim 1CO_2$
گام ۲: با توجه به اطلاعات داده‌شده در سؤال، جرم و در نتیجه مول گاز CO_2 تشکیل‌شده در دو ظرف با هم برابر است؛ پس با توجه به گام اول، می‌توان دریافت که مول CH_3OH و CH_4 با هم برابر بوده و در نتیجه نسبت جرم CH_3OH به CH_4 در ابتدای فرایند برابر با نسبت جرم مولی آن‌هاست:

$$\frac{\text{جرم مولی } CH_3OH \times \text{مول } CH_3OH}{\text{جرم مولی } CH_4 \times \text{مول } CH_4} = \frac{32}{16} = 2$$

۸۱- گزینه ۳

درس‌نامه نام‌گذاری آلکان‌های شاخه‌دار

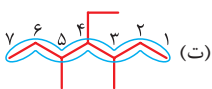
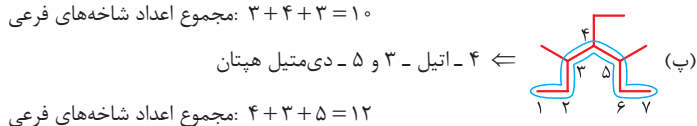
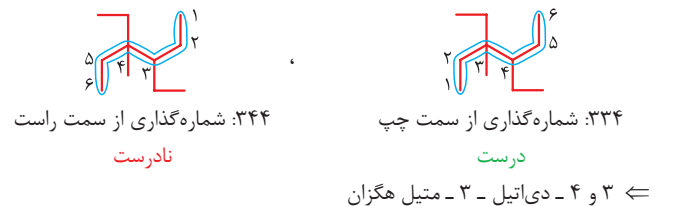
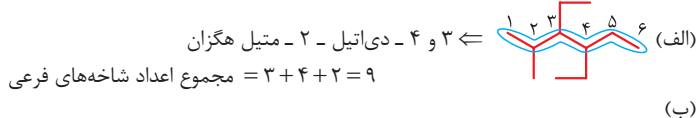
برای نام‌گذاری ساختار آلکان‌های شاخه‌دار، ابتدا باید زنجیر اصلی کربنی (طولانی‌ترین مسیر اتم‌های کربن) در آن را پیدا کرده و شماره‌گذاری این زنجیر را از سمتی انجام دهیم که از کنار هم قرار دادن شماره‌های شاخه‌های فرعی آن، عدد کوچک‌تری به دست آید.



در مرحله بعد، شماره و نام شاخه‌های فرعی را براساس تقدم حرف اول نام لاتین آن‌ها می‌آوریم و در نهایت نام آلکان مربوط به زنجیر اصلی را می‌نویسیم:
 ۵- اتیل - ۴، ۲ - تری‌متیل هپتان

شفاف‌سازی: یکسان‌بودن فرمول ساختاری دو ترکیب، یعنی دو ساختار یکسان بوده و مربوط به یک نوع ترکیب است.

استراتژی: ابتدا ترکیب‌های «الف» تا «ت» را نام‌گذاری می‌کنیم و با توجه به نام آن‌ها دو ترکیبی که نام و در نتیجه فرمول ساختاری یکسان دارند را برای قسمت اول و ترکیبی که کم‌ترین مجموع اعداد در شاخه‌های فرعی را دارد، به عنوان جواب قسمت دوم سؤال انتخاب می‌کنیم.



تیزبازی: با به نگاه به گزینه‌ها متوجه می‌شید که کم‌ترین مجموع اعداد شاخه‌های فرعی مربوط به یکی از دو ترکیب (الف) یا (ب) است؛ بنابراین فقط با نام‌گذاری این دو ترکیب، هم جواب قسمت دوم سؤال به دست می‌آید و هم متوجه می‌شید که این دو ترکیب فرمول ساختاری یکسان ندارند و جواب قسمت اول سؤال رو به دست می‌آید.

۸۲- گزینه ۲

عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: (الف) اتانول، استون و هگزان، هر سه به عنوان حلال آلی در صنعت و آزمایشگاه کاربرد دارند.

(ب) NH_3 و H_2O برخلاف CO_2 دارای جاذبه بین مولکولی از نوع پیوند هیدروژنی هستند. (پ) کاملاً درست! گشتاور دوقطبی، نشان‌دهنده قطبیت ماده است و در شرایط یکسان با افزایش میزان آن، قدرت نیروی بین مولکولی هم افزایش پیدا می‌کند.

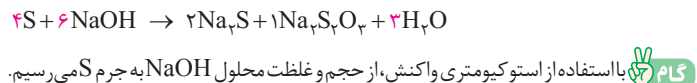
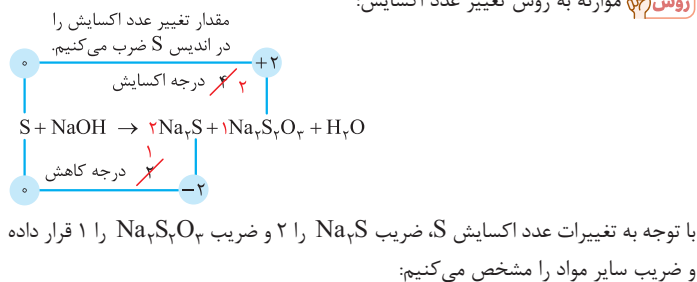
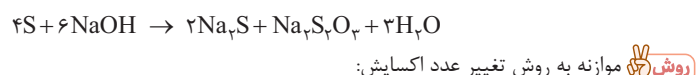
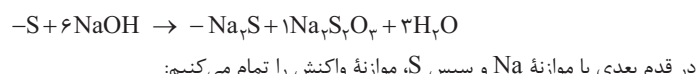
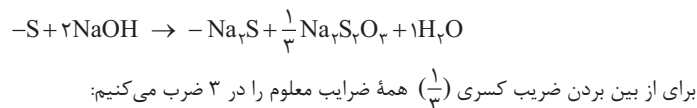
(ت)

نکته: انحلال‌پذیری گازها در آب با دما رابطه عکس و با فشار رابطه مستقیم دارد. در شرایط یکسان، به دلیل قطبیت، انحلال‌پذیری گاز قطبی NO از گاز ناقطبی O_2 بیشتر است. با تغییر دما و فشار در شرایط یکسان برای هر دو گاز، میزان تغییرات انحلال‌پذیری NO بیشتر از O_2 خواهد بود؛ یعنی با کاهش فشار و افزایش دما که باعث کاهش انحلال‌پذیری گازها در آب می‌شود، انحلال‌پذیری NO نسبت به O_2 در آب، بیشتر کاهش می‌یابد.

۸۳- گزینه ۱

گام ۱: ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:

روش ۱: موازنه به روش وارسی:
 $S + NaOH \rightarrow Na_2S + Na_2S_2O_3 + H_2O$
 موازنه را باید با اتم هیدروژن شروع کنیم (زیرا سه اتم دیگر در بیش از ۲ ماده، ضریب مجهول دارند) و سپس اکسیژن را موازنه می‌کنیم:



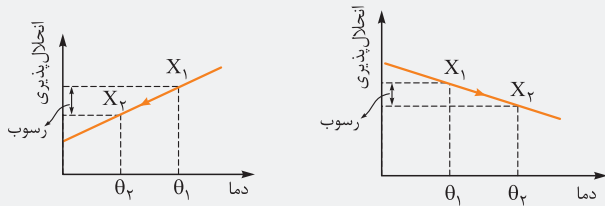
روش ۱: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{0.1 \times 0.3}{6} = \frac{x}{4 \times 32} \Rightarrow x = 0.64 \text{ g S}$$

۸۵ - گزینه ۱

نکته انحلال پذیری اغلب نمکها با دما رابطه مستقیم و انحلال پذیری برخی از آن‌ها، با دما رابطه معکوس دارد. در نمک‌هایی که شیب نمودار انحلال پذیری - دمای آن‌ها صعودی است، با کاهش دما، مقداری از نمک رسوب می‌کند و در نمک‌هایی که شیب نمودار انحلال پذیری - دمای آن‌ها نزولی است، با افزایش دما، مقداری از نمک در ظرف رسوب می‌کند.



در همه نمک‌های محلول در آب، نوع جاذبه بین ذرات، جاذبه یون - دوقطبی است و با تغییر دما، نوع جاذبه تغییر نمی‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۲ و ۳ اگر انحلال نمک گرماده باشد، با افزایش دما، مقداری نمک رسوب می‌کند و با اضافه شدن نمک بیشتر، محلول سیر شده ایجاد نمی‌شود.

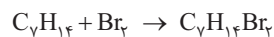
۴ نمودار انحلال پذیری - دما برای برخی نمک‌ها خطی و برای برخی دیگر، غیر خطی و به صورت منحنی است. (معادله انحلال پذیری همه نمک‌ها در آب، از رابطه خط راست $S = a\theta + b$) تبعیت نمی‌کند.)

۸۶ - گزینه ۴

شفاف سازی با توجه به فرمول عمومی آلکان‌ها (C_nH_{2n+2}) و آلکن‌ها (C_nH_{2n}) ، در مخلوط مورد نظر، یک آلکان (C_8H_{18}) و یک آلکن (C_7H_{14}) داریم. باید توجه کرد که فقط آلکن با برم واکنش می‌دهد.

گام ۱ از آنجایی که از بین دو هیدروکربن داده شده، فقط C_7H_{14} (آلکن) با برم واکنش می‌دهد، جرم C_7H_{14} را در مخلوط محاسبه می‌کنیم:

نکته هر مول آلکن با ۱ مول برم (Br_2) واکنش می‌دهد و به ترکیب سیر شده برم‌دار تبدیل می‌شود: $C_nH_{2n} + Br_2 \rightarrow C_nH_{2n}Br_2$



$$\frac{1}{6} g Br_2 \times \frac{1 \text{ mol } Br_2}{160 g Br_2} \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_{14}}{1 \text{ mol } Br_2} \times \frac{98 g C_7H_{14}}{1 \text{ mol } C_7H_{14}} = 0.98 g C_7H_{14}$$

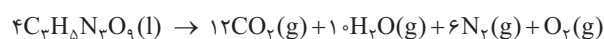
گام ۲ با کم کردن جرم آلکن از جرم مخلوط داده شده، جرم آلکان را به دست آورده و سپس به کمک جرم‌های مولی آن‌ها، نسبت مولی خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$C_8H_{18} \text{ جرم} = \text{جرم مخلوط} - C_7H_{14} \text{ جرم} = 1.208 - 0.98 = 0.228 g C_8H_{18}$$

$$\frac{C_7H_{14} \text{ جرم مولی}}{C_8H_{18} \text{ جرم مولی}} = \frac{0.98}{0.228} = \frac{0.01}{0.02} = 5$$

۸۷ - گزینه ۲

گام ۱ ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:



گام ۲ طبق قانون آووگادرو، در دما و فشار یکسان، حجم‌های یکسان از گازهای مختلف، شمار مول‌های یکسانی دارند؛ بنابراین می‌توان با توجه به حجم فراورده‌های گازی تولیدی در شرایط STP، به مول و جرم خالص ماده اولیه رسید:

نکته بچه‌ها حواستون باشه که در شرایط استاندارد یا STP (فشار ۱ atm و دمای $0^\circ C$)، H_2O جامد است نه گاز! بنابراین نباید H_2O جزء فراورده‌های گازی واکنش در این شرایط در نظر بگیریم.

روش استفاده از کسر تناسب:

$$4C_4H_8N_2O_9 \sim \frac{19 \text{ mol گاز}}{(12CO_2 + 6N_2 + 10O_2)}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

$$300 \text{ mL محلول} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{4 \text{ mol S}}{6 \text{ mol NaOH}} \times \frac{32 \text{ g S}}{1 \text{ mol S}} = 0.64 \text{ g S}$$

۸۴ - گزینه ۴

درس نامه نسبت درصد جرمی یا غلظت ppm اجزاء در یک محلول

اگر در محلول یک ترکیب یونی (مانند AB_p)، درصد جرمی یا ppm جزئی مانند A^{2+} یا B^{-} مشخص باشد، درصد جرمی یا ppm اجزاء دیگر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\text{جرم مولی } A \times A \text{ ppm}(A^{2+})}{\text{جرم مولی } B \times B \text{ ppm}(B^{-})} = \frac{\text{جرم } A}{\text{جرم } B}$$

مول A و B در فرمول بالا، همان ضرایب A و B در معادله تفکیک ترکیب در آب (یا اندیس آن‌ها در فرمول شیمیایی ترکیب یونی) هستند.

مثال: در محلول کلسیم برمید $(CaBr_2)$ ، نسبت غلظت ppm یون Ca^{2+} به Br^{-} ، این پوری حساب می‌شه؛ (با توجه به فرمول $CaBr_2$ ، به ازای هر یون Ca^{2+} ، ۲ یون Br^{-} وجود دارد.)

$$\frac{\text{جرم مولی } Ca^{2+} \times \text{ppm}(Ca^{2+})}{\text{جرم مولی } Br^{-} \times \text{ppm}(Br^{-})} = \frac{1 \times Ca^{2+}}{2 \times Br^{-}}$$

استراتژی اول جرم یون سولفات رو در هر یک از محلول‌های سدیم سولفات و آهن (III) سولفات محاسبه کن. بعد با توجه به مجموع جرم یون سولفات و جرم مخلوط نهایی، غلظت این یون رو بر حسب ppm به دست بیار.

گام ۱ محاسبه جرم یون سولفات در محلول سدیم سولفات:

روش با توجه به تعریف ppm، در 10° گرم محلول سدیم سولفات (Na_2SO_4) ، 1380 گرم Na^+ وجود دارد. حالا از روی جرم Na^+ ، جرم SO_4^{2-} را در 10° گرم محلول (که می‌شه ppm یون سولفات) حساب می‌کنیم:

$$1380 g Na^+ \times \frac{1 \text{ mol } Na^+}{23 g Na^+} \times \frac{1 \text{ mol } SO_4^{2-}}{1 \text{ mol } Na^+} \times \frac{96 g SO_4^{2-}}{1 \text{ mol } SO_4^{2-}} = 2880 g$$

روش با توجه به در سنامه ابتدای پاسخ و نسبت غلظت ppm اجزاء در محلول Na_2SO_4 داریم:

$$\frac{\text{جرم مولی } Na^+}{\text{جرم مولی } SO_4^{2-}} = \frac{2 \times Na^+}{1 \times SO_4^{2-}} \Rightarrow \frac{\text{ppm}(Na^+)}{\text{ppm}(SO_4^{2-})} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1380}{\text{ppm}(SO_4^{2-})} = \frac{2 \times 23}{96} \Rightarrow \text{ppm}(SO_4^{2-}) = \frac{1380 \times 96}{46} = 2880$$

حالا جرم SO_4^{2-} را در 100 گرم محلول به دست می‌آوریم:

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 2880 = \frac{\text{جرم } SO_4^{2-}}{100} \times 10^6$$

$$\Rightarrow \text{جرم } SO_4^{2-} = 0.288 g$$

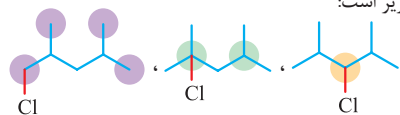
گام ۲ محاسبه جرم SO_4^{2-} در $Fe_2(SO_4)_3$:

$$1 mg Fe_2(SO_4)_3 \times \frac{1 g}{1000 mg} \times \frac{1 \text{ mol } Fe_2(SO_4)_3}{392 g Fe_2(SO_4)_3} \times \frac{3 \text{ mol } SO_4^{2-}}{1 \text{ mol } Fe_2(SO_4)_3} \times \frac{96 g SO_4^{2-}}{1 \text{ mol } SO_4^{2-}} = 0.288 g$$

گام ۳ با توجه به مجموع جرم یون سولفات و جرم محلول نهایی (با فرض سؤال، 100 گرم) غلظت ppm یون سولفات برابر است با:

$$\text{ppm}(SO_4^{2-}) = \frac{0.288 + 0.288}{100} \times 10^6 = 3168$$

هر چهار گروه CH_3 با هم و هر دو گروه CH با هم، موقعیت یکسان دارند. ساختار نقطه - خط برای ۳ ساختار کلردار حاصل به صورت زیر است:



۸۹- گزینه ۱

درس نامه شبه فلزها و نافلزهای جدول تناوبی

شبه فلزها (۸ عنصر) در جدول دوره‌ای همانند مرزی بین فلزها و نافلزها قرار دارند. عنصرهایی که در سمت راست این شبه فلزها قرار گرفته‌اند، نافلز و عنصرهایی که در سمت چپ این شبه فلزها قرار گرفته‌اند، فلز هستند (البته به جز هیدروژن که یک نافلز است). اگر به جایگاه قرارگیری شبه فلزات در جدول تناوبی توجه کنید:

در هر یک از دوره‌های ۲ و ۳ یک شبه فلز و در هر یک از دوره‌های ۴، ۵ و ۶ دو شبه فلز قرار دارند.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
H	He											B	C	N	O	F	Ne
												Si	P	S	Cl	Ar	
												Ge	As	Se	Br	Kr	
												Sb	Te	I	Xe		
												Po	At	Rn			

فلز: سبز
نافلز: نارنجی
شبه فلز: قرمز

شفاف سازی: عنصر A می‌تواند یکی از نافلزهای گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ و یا هیدروژن باشد. از آن‌جا که این عنصر نافلزی دارای فعالیت شیمیایی است، نمی‌تواند گاز نجیب باشد. عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: (الف) در بین عنصرهای نافلزی گروه‌های ۱۴ تا ۱۷ فقط عنصرهای O، N، F و Cl از دوره ۲ و Cl از دوره ۳ گاز هستند، در هر یک از دوره‌های ۲ و ۳ جدول فقط یک شبه فلز وجود دارد نه دوتا!

(ب) فقط در گروه ۱۷ بیش از یک عنصر گازی وجود دارد (F و Cl). حالت فیزیکی برم و ید، دو عنصر دیگر در این گروه، به ترتیب مایع و جامد است و با حالت فیزیکی عنصر گازی A که می‌تواند کلر یا فلوئور باشد، متفاوت است.

(پ) عدد اتمی آخرین شبه فلز گروه ۱۴ (Ge)، ۳۲ است. اگر عدد اتمی A از ۳۲ کوچک‌تر باشد، عنصر A در یکی از دوره‌های ۱ تا ۳ جدول است و با فلزهای واسطه که از دوره چهارم جدول شروع می‌شوند، نمی‌تواند هم‌دوره باشد.

(ت) نافلزترین عنصر هر دوره، در گروه ۱۷ قرار دارد؛ بنابراین A در این عبارت متعلق به گروه ۱۷ است. با توجه به این‌که در هر گروه از بالا به پایین، خصلت نافلزی عنصر کاهش می‌یابد، برای اینکه عنصر D خاصیت نافلزی بیشتری از عنصر A داشته باشد، باید در دوره (ها)ی قبل از عنصر A قرار داشته باشد؛ بنابراین باید عدد اتمی D از A کوچک‌تر باشد.

تیز بازی: مثل اکثر سؤالات موردی الف، ب و... در این سؤال هم با بررسی دو عبارت به پاسخ می‌رسی. با مشخص شدن نادرستی عبارت «الف»، با توجه به گزینه‌ها، فقط باید عبارت «ب» یا «پ» رو به دلخواه بررسی کنی.

۹۰- گزینه ۴

عبارت‌های «ب» و «ت» درست‌اند. هر دو ترکیب (a) و (b) دارای گروه عاملی آلدهیدی (—C—H) بوده و فرمول مولکولی آن‌ها به ترتیب $\text{C}_9\text{H}_{18}\text{O}$ و $\text{C}_7\text{H}_{14}\text{O}$ است.

بررسی عبارت‌ها: (الف)

نکته: شمار پیوندهای اشتراکی در یک ترکیب آلی را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(1 \times \text{تعداد اتم‌های هیدروژن یا هالوژن}) + (4 \times \text{تعداد اتم‌های کربن}) + (3 \times \text{تعداد اتم‌های نیتروژن}) + (2 \times \text{تعداد اتم‌های اکسیژن})}{2}$$

$$\frac{\text{مجموع حجم گازهای تولیدی در شرایط STP}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم خلوص} \times (\text{درصد خلوص})}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{22/4 \times \text{مجموع ضرایب مواد گازی}}{(\text{CO}_2, \text{N}_2, \text{O}_2)} = \frac{\text{جرم خلوص} \times (\text{درصد خلوص})}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{22/4 \times \text{مجموع ضرایب دو ماده گازی}}{(\text{CO}_2, \text{N}_2, \text{O}_2)} = \frac{\text{جرم خلوص} \times (\text{درصد خلوص})}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

نکته: در مسائل استوکیومتری واکنش، در مواردی که به جای حجم یک ماده گازی، مجموع یا تفاوت حجم دو ماده گازی، خواسته یا داده می‌شود، کسر تناسب مربوط به حجم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\text{مجموع حجم دو گاز}}{\text{جرم مولی گازها} \times (\text{مجموع ضرایب دو ماده گازی})} = \frac{\text{تفاوت حجم دو گاز}}{\text{جرم مولی گازها} \times |\text{تفاوت ضرایب دو ماده گازی}|}$$

$$\frac{363/2 \times \frac{x}{100}}{4 \times 227} = \frac{127/68}{(12+6+1) \times 22/4} \Rightarrow x = \frac{1 \times 227 \times 30}{363/2} = \frac{300}{4} = 75\%$$

روش: استفاده از کسر تبدیل:

$$127/68 \text{ L گاز} \times \frac{1 \text{ mol گاز}}{22/4 \text{ L گاز}} \times \frac{4 \text{ mol C}_3\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_9}{(12+6+1) \text{ mol گاز CO}_2, \text{N}_2, \text{O}_2}$$

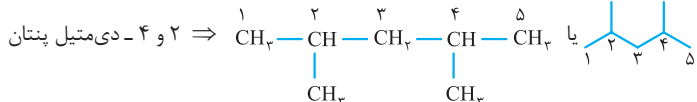
$$\frac{227 \text{ g C}_3\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_9}{1 \text{ mol C}_3\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_9} \times \frac{127/68 \times 4 \times 227}{22/4 \times 19} = 272/4 \text{ g}$$

$$\frac{272/4}{363/2} \times 100 = \frac{272}{363} \times 100 = 75\%$$

۸۸- گزینه ۳

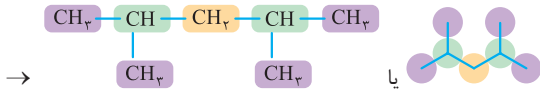
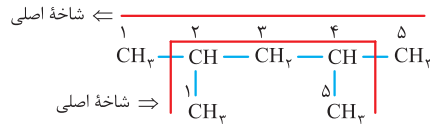
استراتژی: ابتدا فرمول ساختاری یا نقطه - خط هیدروکربن مورد نظر را بکش و بعد حالت‌های مختلف قرارگیری اتم کلر به جای یک اتم H در هیدروکربن را در نظر بگیر، حواست باشه که موقعیت‌های یکسان رو، چند بار نشمری!

گام ۱: رسم فرمول ساختاری یا نقطه - خط هیدروکربن:

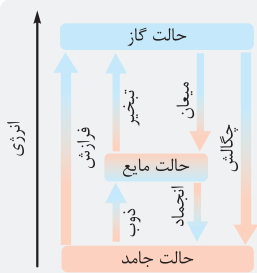


گام ۲: جایگزین کردن ۱ اتم Cl با ۱ اتم H در ترکیب و به دست آوردن ساختارهای متفاوت (ایزومرهای) ترکیب و شمارش آن‌ها:

اگر به فرمول ساختاری این هیدروکربن دقت کنید، موقعیت ۴ گروه CH_3 در آن، با یکدیگر کاملاً یکسان است، همچنین موقعیت دو گروه CH در آن هم، کاملاً یکسان می‌باشد و در نهایت یک موقعیت CH_3 هم داریم؛ بنابراین با جایگزین کردن ۱ اتم Cl با ۱ اتم H در هر کدام از گروه‌های CH_3 ، یک نوع ساختار، در هر کدام از گروه‌های CH ، ۱ نوع ساختار دیگر و در گروه CH_3 هم ۱ ساختار دیگر به دست می‌آید که کلاً می‌شه ۳ ساختار متفاوت.



۹۲- گزینه ۳



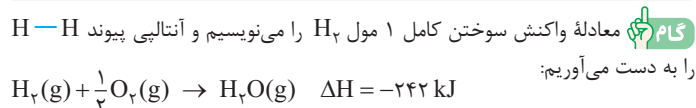
نکته تغییر حالت‌های فیزیکی مواد خالص تفاوت سطح انرژی یک ماده در حالت‌های مایع و گاز، بیشتر از تفاوت سطح انرژی حالت‌های جامد و مایع است؛ بنابراین برای مقدار معینی از یک ماده خالص، میزان تغییر انرژی در فرایندهای تغییر حالت‌های فیزیکی، به صورت مقابل است:

$$|\Delta H| \text{ (ذوب یا انجماد)} > |\Delta H| \text{ (تبخیر یا میعان)} > |\Delta H| \text{ (فرازش یا چگالش)}$$

فرایند تصعید (فرازش) یک ماده، دشوارتر از فرایندهای تبخیر و ذوب کردن آن ماده است. در ضمن ΔH تبخیر با $-\Delta H$ میعان برابر است.

۹۳- گزینه ۴

استراتژی اول واکنش سوختن کامل ۱ مول گاز H_2 رو بنویس. با توجه به این که ΔH این واکنش و آنتالپی‌های پیوند $O=O$ و $O-H$ رو داری، آنتالپی پیوند $H-H$ رو به دست بیار. حالا با داشتن آنتالپی‌های پیوند $H-H$ و $H-Cl$ راحتی می‌تونی آنتالپی واکنش مورد نظر سؤال رو به دست بیاری.



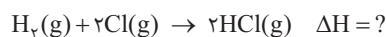
نکته $\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\Delta H(H-H) + \frac{1}{2}\Delta H(O=O)] - [2\Delta H(O-H)]$$

$$\Rightarrow -242 = (x + \frac{1}{2}(496)) - (2(460)) \Rightarrow x = 430$$

$$\Delta H(H-H) = 430 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

گام ۲ با استفاده از آنتالپی‌های پیوند مواد واکنش‌دهنده و فراورده، ΔH واکنش مورد نظر سؤال را محاسبه می‌کنیم:



$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \Delta H(H-H) - (2\Delta H(H-Cl)) = 430 - 2(430) = -430 \text{ kJ}$$

بچه‌ها دقت کنید که مواد واکنش‌دهنده در این واکنش، مولکول H_2 و اتم‌های Cl هستند نه مولکول‌های Cl_2 ! بنابراین نیازی به آنتالپی پیوند $Cl-Cl$ نداریم!

۹۴- گزینه ۲

درس‌نامه سرعت متوسط مصرف یا تولید مواد و سرعت متوسط واکنش

استوکیومتری واکنش، یعنی ارتباط کمی میان مقدار مواد شرکت‌کننده در واکنش (واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها)، بر مبنای مول است. به عبارتی دیگر، در معادله موازنه‌شده واکنش، ضرایب مواد، نسبت مولی بین مواد را نشان می‌دهند.

سرعت مصرف یا تولید یک ماده شرکت‌کننده در واکنش را می‌توان برحسب تغییر تعداد مول‌های آن در واحد زمان برای همه مواد (تغییر غلظت مولی در واحد زمان، برای مواد محلول و گازی و یا تغییر حجم در واحد زمان برای مواد گازی واکنش) بیان کرد.

سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد در یک واکنش، با ضرایب استوکیومتری آن‌ها متناسب است؛ یعنی در یک بازه زمانی معین، قدرمطلق میزان تغییرات تعداد مول یا غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش، متناسب با ضرایب استوکیومتری آن‌ها است.

به طور مثال در واکنش $2SO_2 + O_2 \rightarrow 2SO_3$ خواهیم داشت:

$$\Delta n(SO_3) = 2|\Delta n(O_2)| \text{ یا } \Delta[SO_3] = 2|\Delta[O_2]|$$

$$a = \frac{\frac{C}{(9 \times 4)} + \frac{H}{(8 \times 1)} + \frac{O}{(1 \times 2)}}{2} = 23$$

$$b = \frac{\frac{C}{(7 \times 4)} + \frac{H}{(6 \times 1)} + \frac{O}{(1 \times 2)}}{2} = 18$$

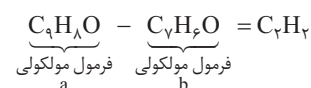
$$\Rightarrow \text{تفاوت شمار پیوندهای اشتراکی} = 23 - 18 = 5$$

$$e = 5 \times 2 = 10$$

تله اگر در این عبارت حواستون به کلمه شمار الکترون‌های اشتراکی نباشه و شمار پیوندهای اشتراکی رو در نظر بگیرید، این عبارت رو به اشتباه درست می‌گیرید.

تیزبازی در دو ترکیب غیر رادیکال پایدار مانند a و b ، همواره تفاوت تعداد اشتراکی عددی زوج است و عدد فرد ۵ نمی‌تونه باشه!

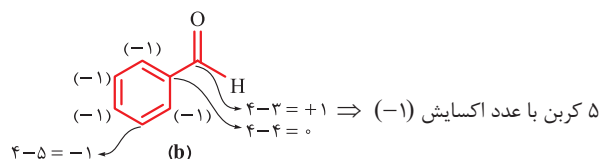
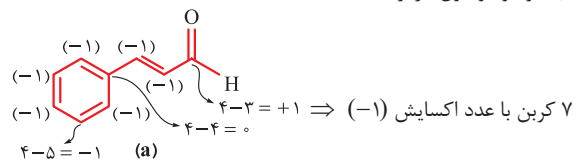
(ب) دومین عنصر خانواده آلکین‌ها (C_nH_{2n-2}) ، ۳ اتم کربن داشته و دارای فرمول مولکولی C_3H_4 است، ولی تفاوت جرم مولی a و b برابر با جرم مولی C_3H_4 است.



(ب) با جایگزین کردن گروه‌های CH_3 به جای اتم‌های H ، با توجه به بیشتر بودن شمار اتم‌های هیدروژن در ترکیب a ، ۸ اتم H و b ، ۶ اتم H دارند، میزان افزایش جرم مولی a بیشتر از b خواهد بود.

(ت) همه هیدروژن‌های دو ترکیب، به کربن متصل است؛ بنابراین تفاوت شمار پیوندهای $C-H$ آن‌ها با تفاوت شمار هیدروژن‌های آن‌ها برابر است: $8 - 6 = 2$

با توجه به عدد اکسایش اتم‌های کربن در مولکول‌های a و b ، تفاوت شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش (-1) در دو مولکول، برابر $7 - 5 = 2$ است.



تیزبازی در این سؤال، با بررسی دو عبارت «الف» و «ب» و مشخص شدن نادرستی آن‌ها، به پاسخ می‌رسید و نیازی به بررسی عبارت‌های زمان‌بر «پ» و «ت» نبود.

۹۱- گزینه ۱

مولکول	فرمول	شمار کل اتم‌ها	شمار نوع عنصرها
سیانواتن	C_2H_3N	۷	۳
وینیل کلرید	C_2H_3Cl	۶	۳
تترافلوروواتن	C_2F_4	۶	۲
فرمیک اسید	$HCOOH$	۵	۳
استون	C_3H_6O	۱۰	۳
پروپین	C_3H_4	۷	۲

تنها در مولکول‌های سیانواتن و تترافلوروواتن تفاوت شمار کل اتم‌ها با شمار نوع عنصرها برابر ۴ است.

اما اگر مقدار مربوط به باز ($n_b \cdot M_b \cdot V_b$) بیشتر باشد، محیط بازی خواهد بود و مقدار به دست آمده، مول OH^- را نشان می‌دهد.

گام ۲ ابتدا غلظت مولی محلول NaOH را حساب می‌کنیم:

$$[NaOH] = \frac{1/6 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{40 \text{ g}}}{1 \text{ L}} = 0.04 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام ۳ مول H^+ یا OH^- باقی‌مانده در محلول را به دست می‌آوریم:

$$|n_a \cdot M_a \cdot V_a - n_b \cdot M_b \cdot V_b| = |(1 \times 0.04 \times 0.2) - (1 \times 0.04 \times 0.2)| = |0.008 - 0.008| = 0$$

مول $H^+ > OH^-$ → مول H^+ باقی‌مانده = 0.012 mol

گام ۴ حالا با توجه به حجم نهایی محلول، $[H^+]$ و pH نهایی محلول را حساب می‌کنیم:

$$[H^+] = \frac{\text{مول } H^+ \text{ باقی‌مانده}}{V_a + V_b + V_{\text{آب}}} = \frac{0.012 \text{ mol}}{(0.1 + 0.2 + 0.2) \text{ L}} = 0.04 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(4 \times 10^{-2}) = 2 - \log 4 = 2 - 0.6 = 1.4$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(4 \times 10^{-2}) = 2 - \log 4 = 2 - 0.6 = 1.4$$

$$= 3 - 2 \log 2 - \log 3 = 3 - (2 \times 0.3) - 0.5 = 1.4$$

۹۷- گزینه ۳

نکته

در سلول گالوانی
الکتروکاتود با E° کوچک‌تر ← آند (قطب منفی) سلول
الکتروکاتود با E° بزرگ‌تر ← کاتد (قطب مثبت) سلول

♦ در همه سلول‌های الکتروشیمیایی (گالوانی و الکترولیتی)، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به کاتد بوده و در محلول (های) الکترولیت، جهت حرکت کاتیون‌ها به سمت کاتد و آنیون‌ها به سمت آند است.

♦ ولتاژ هر سلول گالوانی که به نیروی الکتروموتوری (emf) هم معروف است، همان اختلاف پتانسیل میان دو نیم‌سلول کاتد و آند می‌باشد. برای محاسبه ولتاژ یک سلول گالوانی، باید E° آند را از E° کاتد کم کنیم:

$$emf = E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = E^\circ_{\text{بزرگ‌تر}} - E^\circ_{\text{کوچک‌تر}}$$

در سلول Fe-Pt، الکتروکاتود Fe نقش آند و Pt نقش کاتد را ایفا می‌کند. از این رو آنیون‌های نیم‌سلول Pt توسط دیواره متخلخل به سمت آند یعنی الکتروکاتود Fe حرکت می‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) در همه سلول‌های گالوانی، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به سمت کاتد است و جهت حرکت کاتیون‌ها هم در دیواره متخلخل از الکترولیت محلول آندی به سمت محلول کاتدی است.

۲) در این سلول به ازای مبادله ۲ مول الکترون ($12 \times 10^4 \times 10^{23}$ الکترون)، ۱ مول یا همان ۵۶ گرم از جرم آند (Fe) کم می‌شود. از این رو اگر ۵۶ گرم که معادل 0.01 mol Fe است، از جرم آند کم شود، باید 0.02 mol الکترون که معادل $12 \times 10^4 \times 10^{23}$ الکترون است، از مدار عبور کند.

$$1 \text{ Fe} \sim 2 \text{ Pt} \sim 2 \text{ mole}^-$$

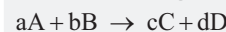
۴) در سلول‌های گالوانی کاتد $E^\circ_{\text{کاتد}}$ بیشتر از $E^\circ_{\text{آند}}$ است؛ بنابراین E° این سلول، برابر است با:

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = E^\circ_{\text{(Fe}^{2+}/\text{Fe)}} - E^\circ_{\text{(Mn}^{2+}/\text{Mn)}}$$

$$= -0.44 - (-1.18) = 0.74 \text{ V}$$

در ضمن در سلول Mn-Fe، الکتروکاتود Fe (دارای E° بزرگ‌تر) نقش کاتد را داشته و کاتیون Fe^{2+} در آن کاهش می‌یابد؛ بنابراین Fe^{2+} اکسند است.

♦ سرعت متوسط واکنش از تقسیم سرعت متوسط تولید یا مصرف یک ماده شرکت‌کننده در واکنش بر ضریب استوکیومتری آن در معادله موازنه‌شده، به دست می‌آید:



$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(B)}{b} = \frac{\bar{R}(C)}{c} = \frac{\bar{R}(D)}{d}$$

می‌دانیم که سرعت متوسط تولید یا مصرف مواد در یک واکنش با ضرایب استوکیومتری آن‌ها متناسب است. از طرفی دیگر، استوکیومتری واکنش بر مبنای مول بوده و ضرایب استوکیومتری مواد در معادله واکنش، نسبت‌های مولی آن‌ها را نشان می‌دهد؛ بنابراین اگر ضریب استوکیومتری مواد A و D در واکنش را به ترتیب a و d در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}(A)}{a} = \frac{\bar{R}(D)}{d} \Rightarrow \frac{|\frac{\Delta m}{M}(A)|}{a \cdot \Delta t} = \frac{|\frac{\Delta m}{M}(D)|}{d \cdot \Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t} = \frac{a}{d} \frac{\Delta m_D}{\Delta t} \Rightarrow M_D = \frac{1}{3} M_A$$

$$\frac{3 \Delta m(D)}{a \cdot \Delta t \cdot M_D} = \frac{\Delta m(D)}{d \cdot \Delta t \cdot M_D} \Rightarrow a = d$$

بنابراین ضرایب استوکیومتری دو ماده A و D در واکنش یکسان است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با توجه به این که ضرایب استوکیومتری دو ماده A و D با هم برابر است، سرعت متوسط مصرف یا تولید آن‌ها با هم برابر است؛ یعنی در واحد زمان، تغییر شمار مول A و D با هم برابر می‌باشد.

۳) طبق اطلاعات سؤال، ما فقط می‌دانیم که ضرایب استوکیومتری A و D با هم برابرند، ولی نمی‌توان گفت که این ضرایب برابر ۱ هستند؛ بنابراین نمی‌توان گفت که سرعت واکنش، برابر با سرعت تغییر مول D است.

$$\bar{R}_{\text{واکنش}} = \frac{\bar{R}_D}{d} \Rightarrow \text{می‌تواند ۱ یا هر عدد صحیح دیگری باشد}$$

۴) در سؤال، هیچ داده‌ای مبنی بر این که هر یک از دو ماده A و D مشخصاً ماده اولیه یا فراورده هستند، وجود ندارد.

۹۵- گزینه ۱

آنزیم استفاده‌شده در پاک‌کننده‌ها باعث افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها می‌شود. در نتیجه سرعت فرایند پاک‌شدن لباس‌ها افزایش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۲) مخلوط صابون، آب و روغن یک مخلوط ناهمگن از نوع کلوئید است.

۳) انحلال آمونیوم نیترات در آب یک انحلال یونی محسوب می‌شود نه مولکولی!



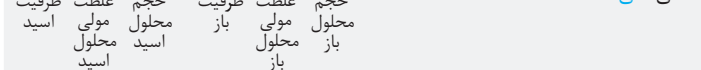
۴) فلزهای قلیایی خاکی دوره‌های ۳ و ۴ به ترتیب Mg و Ca هستند. صابون‌های منیزیم و کلسیم، در آب حل نمی‌شوند و رسوب می‌کنند. از این رو مخلوط آن‌ها با آب یک سوسپانسیون تشکیل می‌دهد نه کلوئید!

۹۶- گزینه ۲

درس‌نامه اضافه کردن اسید و باز قوی بدون خنثی شدن کامل!

اگر محلول اسید و باز قوی را با هم مخلوط کنیم و $n_a \cdot M_a \cdot V_a$ اسید با $n_b \cdot M_b \cdot V_b$ باز برابر نباشد، اسید و باز به طور کامل همدیگر را خنثی نمی‌کنند و مقداری از اسید یا باز باقی می‌ماند.

اسید و باز به طور کامل همدیگر را خنثی نمی‌کنند.



در این گونه موارد، می‌توان مول H^+ یا OH^- باقی‌مانده در محلول را به صورت زیر به دست آورد:

$$|n_a \cdot M_a \cdot V_a - n_b \cdot M_b \cdot V_b| = \text{مول } H^+ \text{ یا } OH^- \text{ باقی‌مانده}$$

اگر مقدار مربوط به اسید ($n_a \cdot M_a \cdot V_a$) بیشتر از مقدار مربوط به باز ($n_b \cdot M_b \cdot V_b$) باشد، محیط اسیدی خواهد بود و مقدار به دست آمده از این رابطه، مول H^+ را نشان می‌دهد؛

۹۸- گزینه ۱



نکته در اسیدهای تک پروتون دار (HA) رابطه درجه یونش (α) و غلظت یون هیدرونیوم ($[H^+]$) به صورت مقابل است:

$$\alpha = \frac{[H^+]}{M} \Rightarrow [H^+] = M \cdot \alpha$$

غلظت اولیه اسید

$$[H^+] = M \cdot \alpha \Rightarrow M = \frac{1 \times 10^{-2}}{10^{-2/3}} = 10^{-2/3} = \frac{1}{10^{2/3}}$$

$$\frac{\log \Delta = 0/7}{10^{-2/3}} \rightarrow X = \frac{1}{\Delta} = 0/2 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[H^+] = M \cdot \alpha \Rightarrow M = \frac{1 \times 10^{-3}}{10^{-2/3}} = 10^{-2/3} = 10^{-3} \times 10^{2/3} = 5 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow Y = 5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow \frac{X}{Y} = \frac{2 \times 10^{-1}}{5 \times 10^{-3}} = 40$$

۹۹- گزینه ۴



در فصل ۲ کتاب درسی شیمی دوازدهم می‌خوانیم که در سلول سوختی، آند و کاتد دارای کاتالیزگرهایی هستند که سرعت نیم‌واکنش‌های اکسایش (هیدروژن) و کاهش (اکسیژن) را افزایش می‌دهند نه این‌که کاتالیزگر باشند!

در مورد (۴)، می‌دانیم که NaCl خالص در دمای 801°C ذوب می‌شود و در برقیافت آن، با افزودن مقداری CaCl_2 (به عنوان کمک‌ذوب) دمای ذوب آن تا حدود 887°C پایین می‌آید. (یعنی حدود $214 = 887 - 801$ (به تقریب 215) درجه سانتی‌گراد، نقطه ذوب کاهش می‌یابد). این کار از نظر اقتصادی به صرفه‌تر است؛ زیرا انرژی کم‌تری مصرف می‌شود.

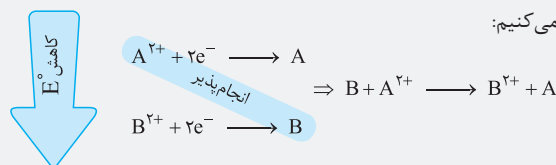
مشاوره در برخی از سؤال‌های کنکورهای اخیر، عبارت‌هایی آورده شده که برای بررسی آن‌ها مستقیماً باید اعداد ذکر شده در متن یا جدول‌های کتاب درسی رو حفظ باشید، مثل نقطه ذوب. متأسفانه چاره‌ای نیست جز این‌که این اعداد رو هم حفظ کنید! پی بگیریم؟!

۱۰۰- گزینه ۱

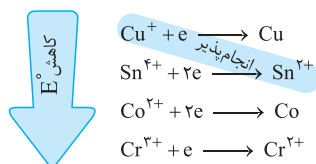


درس‌نامه پیش‌بینی انجام‌پذیری یا انجام‌ناپذیری یک واکنش

در سری الکتروشیمیایی از بالا به پایین، با کاهش E° نیم‌سلول‌ها، قدرت کاهندگی گونه‌های سمت راست افزایش می‌یابد؛ بنابراین در سری الکتروشیمیایی، گونه سمت راست پایین‌تر (کاهنده قوی‌تر) می‌تواند با گونه سمت چپ بالاتر (اکسند قوی‌تر)، واکنش دهد. پس در این گونه سؤالات، اول نیم‌واکنش‌ها را به ترتیب، از E° زیاد به کم، مرتب و سپس از قاعده بالا استفاده می‌کنیم:



ابتدا نیم‌واکنش‌ها را به ترتیب، از E° زیاد به E° کم مرتب می‌کنیم:



با توجه به درس‌نامه، گونه سمت راست پایین‌تر (کاهنده قوی‌تر) می‌تواند با گونه سمت چپ بالاتر (اکسند قوی‌تر) واکنش دهد نه برعکس؛ بنابراین تنها واکنش (۱) انجام‌پذیر است.

۱۰۱- گزینه ۲



درس‌نامه مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های یونی

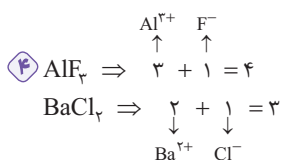
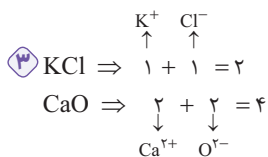
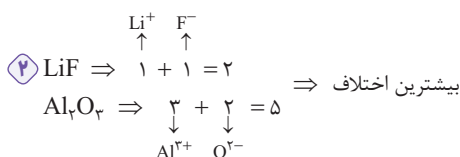
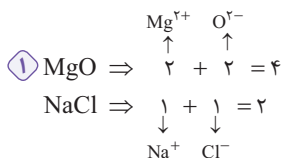
به طور کلی برای مقایسه ΔH فروپاشی شبکه ترکیب‌های یونی می‌توان از روش زیر استفاده کرد:

گام ۱ هر چه مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون در یک ترکیب یونی بزرگ‌تر باشد، ΔH فروپاشی شبکه آن بزرگ‌تر است.

گام ۲ اگر مجموع قدرمطلق بار یک کاتیون و یک آنیون برای دو ترکیب یونی برابر باشد، شعاع یون‌های سازنده آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم؛ هر چه شعاع یون‌ها کوچک‌تر باشد، ΔH فروپاشی بزرگ‌تر است.

به طور کلی در مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلور ترکیب‌های یونی، اولویت با مقایسه مجموع قدرمطلق بار یون‌های سازنده ترکیب یونی است؛ بنابراین هر چه تفاوت مجموع قدرمطلق بار یون‌های سازنده دو ترکیب یونی بیشتر باشد، تفاوت ΔH فروپاشی شبکه بلور آن‌ها با هم بیشتر خواهد بود.

بررسی گزینه‌ها:



۱۰۲- گزینه ۴

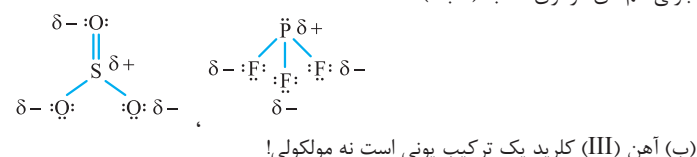


نکته در مولکول‌های چهاراتمی با سه اتم کناری متصل به اتم مرکزی (مانند AB_3)، اگر اتم مرکزی فاقد جفت‌الکترون ناپیوندی باشد، مدل فضاپرکن یا شکل هندسی مولکول به صورت سه‌ضلعی مسطح خواهد بود و اگر اتم مرکزی دارای جفت‌الکترون ناپیوندی باشد، شکل یا مدل فضاپرکن مولکول به صورت هرم با قاعده سه‌ضلعی است.

شمار اتم‌های متصل به اتم مرکزی	شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی اتم مرکزی	شکل گونه	شکل کلی	مثال
۳	۰	سه‌ضلعی مسطح		SO_3
۳	۱	هرمی		NH_3

عبارت‌های «الف» و «ب» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها: (الف) مثلاً اگر مولکول (آ)، PF_3 و مولکول (ب)، SO_3 باشد، بار جزئی اتم‌های مرکزی مشابه (مثبت) است.



$$\text{CO مول} = 0.61 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol CO}}{28 \text{ g CO}} \approx \frac{61}{30} \times 10^{-2} > 2 \times 10^{-2}$$

$$\text{C}_8\text{H}_{18} \text{ مول} = 0.07 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol C}_8\text{H}_{18}}{114 \text{ g C}_8\text{H}_{18}} = \frac{7}{114} \times 10^{-2} < 0.07 \times 10^{-2}$$

$$\text{NO مول} = 0.04 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol NO}}{30 \text{ g NO}} = \frac{4}{30} \times 10^{-2} \approx 0.13 \times 10^{-2}$$

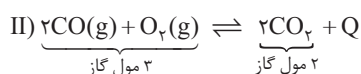
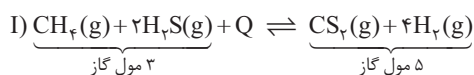


۱۰۴- گزینه ۱

به فرایند تبدیل مواد ساده به ترکیبات پیچیده، سنتز گفته می‌شود نه برعکس!



۱۰۵- گزینه ۴



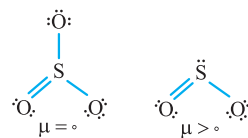
بررسی گزینه‌ها: ۱) طبق اصل لوشاتلیه، با افزایش فشار، تعادل در جهت مول‌های گازی کمتر یعنی در واکنش (I) در جهت برگشت و در واکنش (II) در جهت رفت، جابه‌جا می‌شود.

۲) افزایش حجم ظرف یا کاهش فشار، سبب جابه‌جایی تعادل (II) به سمت مول‌های گازی بیشتر، یعنی واکنش برگشت و افزایش شمار مول‌های واکنش‌دهنده‌ها می‌شود نه فرآورده‌ها!

۳) اولاً که ثابت تعادل (K) تنها وابسته به دماست و تغییر فشار روی مقدار K تأثیری ندارد، ثانیاً واکنش (II)، واکنشی گرماده است و افزایش دما در واکنش‌های گرماده باعث جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت و کاهش مقدار K می‌شود نه افزایش آن!

۴) واکنش‌های (I) و (II) در جهت رفت، به ترتیب با افزایش و کاهش شمار مول‌های گازی همواره هستند؛ بنابراین تغییر یکسان حجم و در نتیجه فشار باعث جابه‌جایی این تعادل‌ها در جهت‌های متفاوت می‌شود.

(پ) اگر مولکول (ب) را SO_3 در نظر بگیریم، یک مولکول ناقطبی با گشتاور دوقطبی برابر صفر ($\mu = 0$) داریم. با کم کردن یک اتم O از آن، مولکول SO_2 به دست می‌آید که یک مولکول قطبی با گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر است:



(ت) خصلت نافلزی در F بیشتر از N و در O بیشتر از N است؛ بنابراین در NF_3 (نیتروژن تری‌فلوئورید)، علامت بار جزئی اتم‌های جانبی (اتم‌های F) منفی و در NO_3 (نیتروژن دی‌اکسید)، علامت بار جزئی اتم مرکزی (N) مثبت است.



۱۰۳- گزینه ۳

گام ۱ ابتدا تغییر جرم (کاهش جرم) هر یک از آلاینده‌ها را به واسطه استفاده از کاتالیزگر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{CO} \text{ تغییرات جرم} = 5/99 - 0/61 = 5/38 \text{ g}$$

$$\text{C}_8\text{H}_{18} \text{ تغییرات جرم} = 1/67 - 0/07 = 1/60 \text{ g}$$

$$\text{NO} \text{ تغییرات جرم} = 1/04 - 0/04 = 1/00 \text{ g}$$

گام ۲ با توجه به مقادیر تغییر جرم و جرم اولیه (جرم بدون حضور کاتالیزگر) هر آلاینده، درصد کاهش جرم آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{CO} \text{ درصد کاهش جرم} = \frac{5/38}{5/99} \times 100 = \frac{538}{599} \approx \frac{538}{6} \approx 90\%$$

$$\text{C}_8\text{H}_{18} \text{ درصد کاهش جرم} = \frac{1/60}{1/67} \times 100 = \frac{160}{167} \approx \frac{160}{17} \approx 94 \Rightarrow \text{کمی بیشتر از } 94\%$$

$$\text{NO} \text{ درصد کاهش جرم} = \frac{1/00}{1/04} \times 100 = \frac{100}{1} \approx \frac{100}{1} \Rightarrow \text{کمی کمتر از } 100\%$$

گام ۳ برای قسمت دوم سؤال، باید جرم آلاینده‌ها به ازای طی یک کیلومتر مسافت با حضور کاتالیزگر را بر جرم مولی آن‌ها تقسیم کنیم تا کم‌ترین مقدار مول آلاینده را بتوانیم محاسبه کنیم که می‌شه مول C_8H_{18} .

